Analisi Matematica 1 - 18 Ottobre 2024 - docente: Callegari

Lezione 13: Massimo Limite e Minimo Limite II

INDICE

1) EQUIVALENZA TRA 4 DEF. LIMINF/LIMSUP
2) RELAZIONE TRA lim, liminf, limsup
3) ~~liminf $(a_n \cdot b_n)$ limsup (a_n+b_n)~~
4) ESEMPI

DATA (a_n) LIMITATA

SIANO

$L_1 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \varepsilon > 0$ $L_1 - \varepsilon \overset{\text{FREQ}}{<} a_n \overset{\text{DEF.}}{<} L_1 + \varepsilon$

$L_2 = \inf \underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid \text{DEF IN } n \ \ a_n \leq x\}}_{\mathcal{M}} = \inf(\mathcal{M})$

$L_3 = \sup \underbrace{\{\ell \in \mathbb{R} \mid a_{n_k} \to \ell\}}_{\mathcal{J}} = \sup(\mathcal{J})$

$L_4 = \lim_{n \to +\infty} \Big(\overbrace{\sup_{k \geq n} a_k}^{A_n} \Big)$

ALLORA $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$

$\boxed{\text{DIM}}$

$\boxed{L_1 = L_2}$ POICHÈ $\forall \varepsilon > 0$ $L_1 + \varepsilon \overset{\text{DEF. IN } n}{>} a_n$ ALLORA $\forall \varepsilon > 0$ $L_1 + \varepsilon \in \mathcal{M}$

MA ALLORA $L_2 \leq L_1 + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ QUINDI $\boxed{L_2 \leq L_1}$

MA NON PUÒ ESSERE $L_2 < L_1$ ALTRIMENTI $\exists \varepsilon > 0$ t.c.

$L_2 < L_1 - \varepsilon$ QUINDI $L_1 - \varepsilon$ È MAGGIORANTE DEFINITIVO (ASSURDO PERCHÈ FREQ IN n $L_1 - \varepsilon < a_n$.

$\boxed{L_2 = L_4}$ $L_2 = \inf \mathcal{M}$

$L_4 = \inf \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ DOVE $\left(A_n = \sup_{k \geq n} a_k\right.$

PERCHÈ $A_{n+1} = \sup \{a_k \mid k \geq n+1\} \leq \sup \{a_k \mid k \geq n\} = A_n$

E DUNQUE

$L_4 = \lim_{n \to +\infty} A_n = \inf \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

(1) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$

PERCHÉ $\left(A_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}\right) \Rightarrow k \geq n \quad a_k \leq A_n$

OVVERO A_n È UN M. ECC. DEF.

(2) INOLTRE $\forall \lambda \in \mathcal{M}$ SO CHE $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $k \geq n_0 \quad a_k \leq \lambda$ QUINDI

$$A_{n_0} = \sup_{k \geq n_0} a_k \leq \lambda$$

Perché

(1) $\Rightarrow$ m È MINORANTE PER $\mathcal{M}$ È ANCHE MINORANTE PER $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

(2) $\Rightarrow$ m È MINORANTE PER $\{A_n\}$ È ANCHE MINORANTE PER $\mathcal{M}$.

INFATTI SE m È MINORANTE PER $\{A_n\}$ PRESO $\lambda \in \mathcal{M}$ ESISTE A_n t.c. $A_n \leq \lambda$ E POICHÉ $m \leq A_n \; \forall n$ SI HA ANCHE $m \leq \lambda$.

POICHÉ L'INSIEME DEI MINORANTI DI $\mathcal{M}$ E $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ È LO STESSO ALLORA $\mathrm{INF}(\mathcal{M}) = \mathrm{INF}(\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}})$

$L_2 \qquad L_4$

$$\boxed{L_2 = L_3}$$

$$L_2 = \mathrm{INF}(\mathcal{M})$$

$$L_3 = \mathrm{SUP}(\mathcal{L})$$

$\{\forall l \in \mathcal{L} \quad \forall \lambda \in \mathcal{M} \quad l \leq \lambda\}$

INFATTI SE P.A. FOSSE CHE $\exists l \in \mathcal{L}$ E $\exists \lambda \in \mathcal{M}$ t.c.

$$l > \lambda$$

ALLORA LA (a_{n_k}) t.c. $a_{n_k} \to l$ SODDISFEREBBE

$a_{k_n} > \lambda$ DEF. INK. MA ALLORA SI AVREBBE

$a_n > \lambda$ FREQ IN n (ASSURDO PERCHÉ λ È MAGG. DEFIN.)

$$\boxed{L_1 \leq L_2}$$

VOGLIO ORA MOSTRARE CHE $L_1 = L_2$. SE P.A. NON FOSSE

ALLORA $\exists$ λ CHE NON È MAGGIORANTE DEF. E TALE CHE

$L_1 < \lambda < L_2$ MA ALLORA FREQ IN n $a_n \geq \lambda$.

OVVERO $\exists (a_{n_k})$ DI (a_n) TUTTA CONTENUTA IN

$[\lambda, L_2]$, QUINDI DA (a_{n_k}), PER B-W POSSO

ESTRARRE SUCC. che tende a $l \in [\lambda, L_2]$ QUINDI,

l È PUNTO LIMITE (ASSURDO)

$\boxed{T.}$ DATA (a_n) $\quad a_n \to l \iff \liminf a_n = l = \limsup a_n$

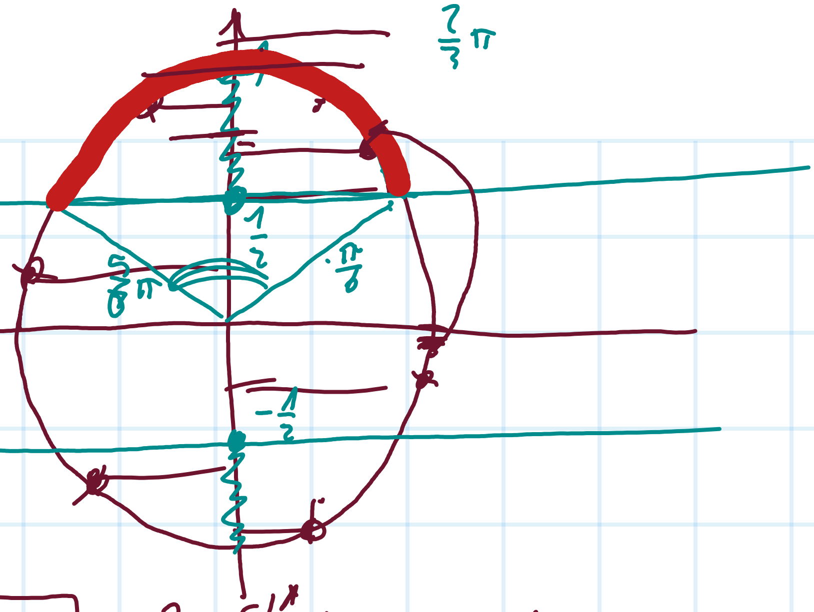
$\boxed{\text{ES. 137 PAG. 69}}$

$a_n = \sqrt{n} \cdot \sin n$

$\sin n > \frac{1}{2}$ $\forall$

$\sqrt{n}\ \sin n > \frac{\sqrt{n}}{2}$

$a_{n_k} > \frac{\sqrt{n_k}}{2}$



$\frac{99}{100}$

$A_n = \{n \in \mathbb{N} \mid 2k\pi < n < 2(k+1)\pi\}$

$n \neq \emptyset$

$B_n = \{n \in A_n \mid \sin n > \frac{1}{2}\}$ −

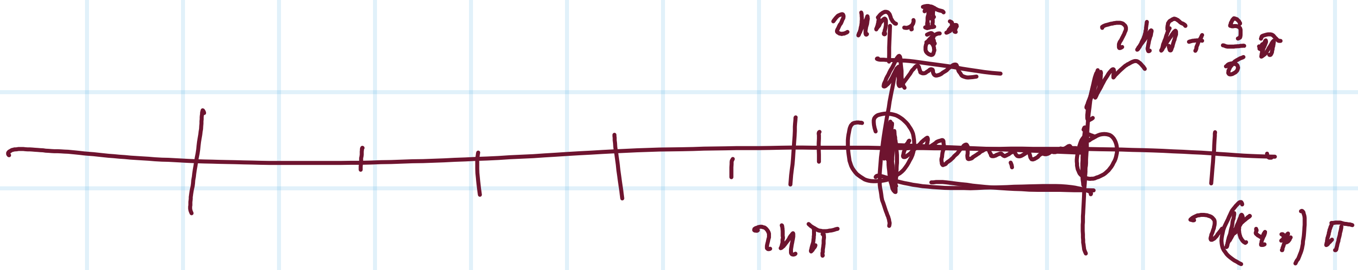
MOSTRIAMO CHE $B_n \neq \emptyset$

$B_k = \{n \in \mathbb{N} \mid 2k\pi \leq n \leq 2(k+1)\pi,\ \sin n > \frac{1}{2}\}$

MOSTRIAMO $B_{n_k} \neq \emptyset$

$S_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \sin n > \frac{1}{2},\ n \leq 2k\pi$ o

$D_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \sin n > \frac{1}{2}\ \ n \geq 2(k+1)\pi\}$



$B_k = \{ n \in \mathbb{N} \mid \lfloor n\pi + \frac{\pi}{6} \rfloor \leq n \leq t(nk) + \frac{5}{6}\pi \}$

$n < \lfloor n \rfloor + 1$

---

139 $\quad a_n = \left(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor\right)^{\sqrt{n}}$

$a_{k^2} \quad \left(\sqrt{k^2} - \lfloor \sqrt{k^2} \rfloor\right)^{\sqrt{k^2}}$

$0^k \to 0$

$k < \sqrt{k^2+2k} < \sqrt{k^2+2k+1} = \sqrt{(k+1)^2} = k+1$

$\boxed{k^2-1}$

$\boxed{k^2+2k} = (k^2+2k+1)-1 \quad \boxed{(k+1)^2-1}$

$a_{k^2-1} = \left(\sqrt{k^2+2k} - \underbrace{\lfloor \sqrt{k^2+2k} \rfloor}\right)^{\sqrt{k^2+2k}} =$

$= \left(\sqrt{k^2+2k} - k\right)^{\sqrt{k^2+2k}} =$

$= \left(1 + \left(\sqrt{k^2+2k} - k\right) - 1\right)^{\sqrt{k^2+2k}}$

$$\left(1 + \frac{-\sqrt{n^2+2n}+(n+1)}{1}\right)^{\sqrt{n^2+2n}}$$

$$\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+(n+1)}\right)^{\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}\right)^{\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2+2n}+(n+1)}}$$

e^{-1}

$e^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2+2n}+(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}}} \to \frac{1}{2}$$

$\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}} \to 1$

$$a_n = \left(\underbrace{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}\right)^{\sqrt{n}} \le$$

$$\boxed{n = k^2 + b}$$

$$0 \le b \le 2k$$

$$\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

$$\left(\sqrt{k^2 + b} - k\right)^{\sqrt{k^2 + b}} \le$$

$$\le \left(\sqrt{k^2 + 1} - k\right)^{\sqrt{k^2}} \to \frac{1}{\sqrt{e}}$$