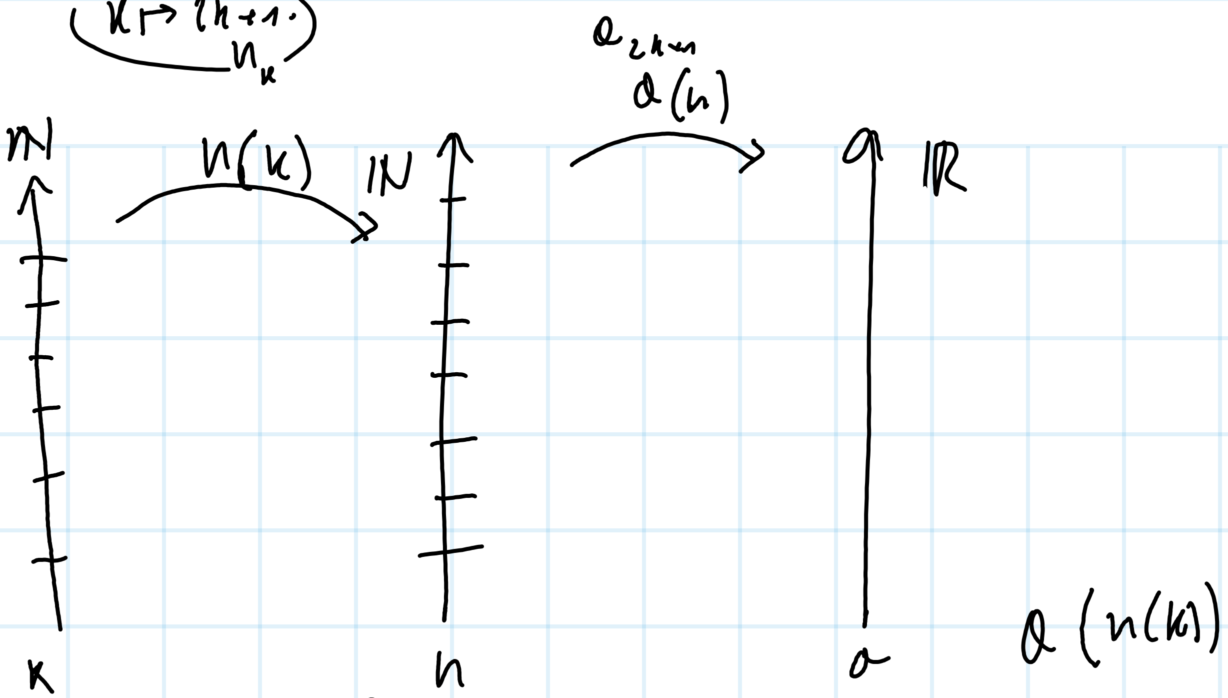
Analisi Matematica 1 - 16 Ottobre 2024 - docente: Callegari

Lezione 11: Sottosuccessioni, topologia, succ. di Cauchy

INDICE

1) SOTTOSUCCESSIONI
2) SOTTOSUCC. DI UNA SUCC. CONVERGENTE
3) T. DI BOLZANO-WEIERSRASS
4) SUCCESSIONI E TOPOLOGIA:
   - A) CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI CHIUSI CON LE SUCCESSIONI
   - B) DEF. DI COMPATTO
   - C) CARATTERIZZ. DI INSIEME COMPATTO
5) SUCCESSIONI DI CAUCHY
   - A) DEFINIZIONE
   - B) LIMITATEZZA
   - C) EQUIVALENZA CON CONVERGENTI
   - D) COMPLETEZZA

PROSSIMA LEZIONE



$n : k \to k^2$ $\qquad$ $a : n \mapsto a_n$

a_{k^2} $\qquad$ $a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots$

$$\underbrace{a_{k^2}}_{n_k} = a(k^2)$$

$\boxed{\text{DEF. 1}}$ DATA (a_n) SUCC. A VALORI IN $\mathbb{R}$ DIREMO CHE (a_{n_k}) È UNA SOTTOSUCC. DI (a_n) SE $n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$ È STRETT. CRESCENTE.

$\boxed{\text{T. 1}}$ DATA (a_n), SE $a_n \to \ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ALLORA OGNI (a_{n_k}) SOTTOSUCC. DI (a_n) SODDISFA $a_{n_k} \to \ell$

$\boxed{\text{DIM}}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\underline{n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon}$ SO QUESTA

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $k \geq k_0 \Rightarrow |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$ SI

$\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n_0$

QUINDI $k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$

$\boxed{\text{ES.}}$ $\boxed{a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n}$

$n_k = 2k$ $\qquad a_{2k} = \left(1 + \frac{(-1)^{2k}}{2k}\right)^{2k} \to e$

$n_k = 2k+1$ $\qquad a_{2k+1} = \left(1 + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right)^{2k+1} \to \frac{1}{e}$

$\boxed{\text{T.}}$ DATA (a_n) SUCC. LIMITATA, ALLORA $\exists (a_{n_k})$ SSUCC. DI (a_n) TALE CHE $a_{n_k} \to \ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{DIM}}$ DIREMO CHE a_{n_0} È "DI PICCO" PER LA SUCC. (a_n) SE $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq a_{n_0}$.

DISTINGUIAMO 2 CASI.

1) (a_n) HA INFINITI "PICCHI"

2) (a_n) HA UN NUM. FINITO DI "PICCHI"

$\boxed{\text{CASO } \boxed{1}}$ SIA (a_{n_k}) LA SSUCC. DI (a_n) COSTITUITA DA TUTTI I PICCHI. TALE SSUCC. È DECRESCENTE PERCHÉ $\forall k_0 \in \mathbb{N}$ $a_{n_{k_0}} \geq a_n$ CON $n \geq n_{k_0}$ E IN PARTICOLARE DI TUTTI a_{n_k} CON $k \geq k_0$.

SICCOME (a_{n_k}) È DECRESCENTE ALLORA $a_{n_k} \to \inf_{k \in \mathbb{N}} \{a_{n_k}\}$

INOLTRE $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{a_{n_k}\} = \ell \in \mathbb{R}$ PERCHÉ (a_n), È QUINDI

ANCHE (a_{n_k}), È LIMITATA.

QUINDI TALE (a_{n_k}) È LA SSUCC. CONV. A LIMITE FINITO.

$\boxed{\text{CASO 2}}$ POICHÉ I "PICCHI" SONO FINITI ALLORA $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

t.c. SE $n \geq n_0$ NESSUN PUNTO È DI PICCO.

QUINDI

PRENDO $n_1 \geq n_0$

PRENDO $n_2 > n_1$ TALE CHE $a_{n_2} > a_{n_1}$ (POSSO FARLO PERCHÉ a_{n_1} NON È DI PICCO)

PRENDO $n_3 > n_2$ TALE CHE $a_{n_3} > a_{n_2}$ (. . a_{n_2})

⋮

PRENDO $n_k > n_{k-1}$ TALE CHE $a_{n_k} > a_{n_{k-1}}$ (. . . $a_{n_{k-1}}$ NON È DI PICCO)

⋮

QUINDI HO TROVATO (n_k) t.c. (a_{n_k}) CRESCENTE

QUINDI $a_{n_k} \to \sup\{a_{n_k}\} \in \mathbb{R}$ È LIMITATA.

PERCHÉ (a_n) (È QUINDI ANCHE (a_{n_k}))

$\boxed{T.}$ DATO $C \subset \mathbb{R}$, È EQUIV. AFFERMARE CHE:

1) C È CHIUSO

2) $\forall (a_n)$ A VALORI IN C, SE $a_n \to l$ ALLORA $l \in C$.

$\boxed{DIM}$ $(1) \Rightarrow (2)$

P.A. (2) SIA FALSO, CIOÈ $\exists (a_n)$ A VALORI IN C t.c.

$a_n \to l \notin C$. MA ALLORA $l \in C^c$ CHE È APERTO

GRAZIE A (1), E QUINDI $\exists$ I INTORNO DI l

t.c. $I \subset C^c$. MA POICHÈ $a_n \to l$ AVRÒ CHE

DEF IN n $a_n \in I \subset C^c$ MA ALLORA DEF IN n $a_n \notin C$

(ASSURDO)

QUINDI NON PUÒ ESSERE FALSO (2)

$(2) \Rightarrow (1)$ P.A. SUPPONIAMO C NON SIA CHIUSO, QUINDI

$\exists x_0$ DI ACC. PER C t.c. $x_0 \notin C$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ PRENDO L'INTORNO D x_0 DI AMPIEZZA $\frac{1}{n}$

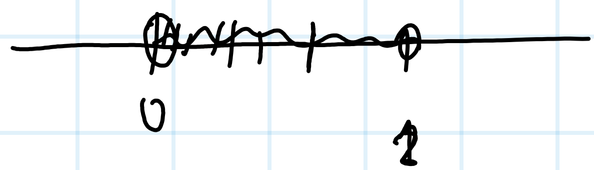
CIOÈ $I_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$. POICHÈ x_0 È DI

ACC. PER C $\exists \underline{x} \in C \cap (I_n - \{x_0\})$ CHE CHIAMO a_n

HO COSTRUITO (a_n) A VALORI IN C t.c. $a_n \to x_0 \notin C$

(ASSURDO)

DEF DATO $K \subset \mathbb{R}$ DIREMO CHE K È COMPATTO (PER SUCC.) SE $\forall (a_n)$ A VALORI IN K $\exists (a_{n_k})$ SSUCC. DI (a_n) T.C. $a_{n_k} \to \ell \in K$.



TEO. SIA $K \subset \mathbb{R}$, È EQUIV. AFFERMARE CHE

1) K È COMPATTO
2) K È CHIUSO E LIMITATO.

DIM $(1) \Rightarrow (2)$

K COMPATTO $\overset{?}{\Rightarrow}$ K LIMITATO.

P.A. SUPPONIAMO K NON LIMITATO. MA ALLORA

$\forall n \in \mathbb{N}$ $K \not\subset [-n,n]$

QUINDI PRENDO $a_n \in K - [-n,n]$

$|a_n| \to +\infty$

$\forall M > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_0 \geq M$ QUINDI

$\underline{\forall n \geq n_0}$ $|a_n| > n \geq n_0 > M$

QUINDI HO TROVATO (a_n) T.C. OGNI SUA SSUCC. $|a_{n_k}| \to +\infty$. QUINDI K NON È COMPATTO. (ASS.)

K COMPATTO $\Rightarrow$ K CHIUSO

DEVO MOSTRARE CHE SE (a_n) È A VALORI IN K E $a_n \to l$ ALLORA $l \in K$.

CIÒ È VERO PERCHÈ SE PRENDO (a_n) A VALORI IN K SICCOME K È COMPATTO SO CHE $\exists (a_{n_k})$ SSUCC. DI (a_n) T.C. $\underline{a_{n_k} \to l' \in K}$. QUINDI $l' = l$ E PERCIÒ $l \in K$

K chiuso e LIMITATO $\Rightarrow$ K COMPATTO.

(?) $\boxed{\forall (a_n)}$ A VALORI IN K $\exists (a_{n_k})$ SSUCC. DI (a_n) T.C. $a_{n_k} \to l \in K$

$\forall (a_n)$ SI HA CHE (a_n) È LIMITATA PERCHÈ K È LIMITATO QUINDI PER. T. BOLZ. WEIERSTRASS. $\exists (a_{n_k})$ SSUCC. DI (a_n) T.C. $a_{n_k} \to l \in \mathbb{R}$ MA $l \in K$ PERCHÈ K È CHIUSO E $\{a_n\} \subset K$.

$\boxed{\text{DEF.}}$ DATA (a_n) DICO CHE (a_n) È DI CAUCHY SE:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ T.C. $\forall n, m \geq n_0$ SI HA $|a_n - a_m| < \varepsilon$.