Analisi Matematica 1 - 2 Ottobre 2024 - docente: Callegari

Lezione 5: Topologia di $\mathbb{R}$

INDICE

1) INTORNI
2) P.T. INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA
3) PT. DI ACCUMULAZIONE, P.T. ISOLATI
4) INSIEMI APERTI, CHIUSI, DENSI, DISCRETI
5) CARATTERIZZAZIONE DEI CHIUSI
6) $\cup$ E $\cap$ FINITE E INFINITE DI APERTI/CHIUSI

1) A^c APERTO
2) $\partial A \subset A$
3) $DA \subset A$

$x \in \partial A$

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{AM1-Callegari-AA2324}}$

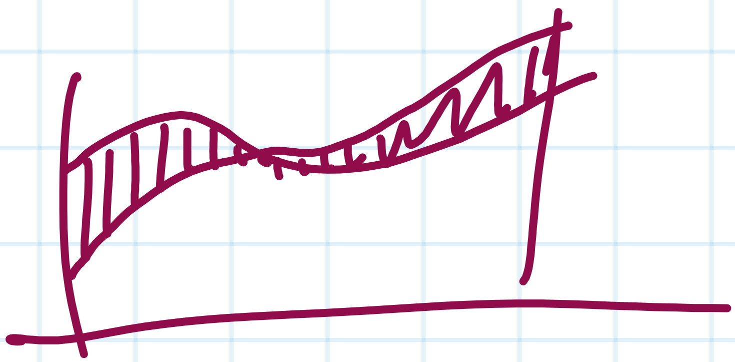
MINUSCOLO

ikf 4399

DEF. 1 DATO $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$ DEFINIAMO

$$I_{x_0}(\rho) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \rho \}$$

$$= (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$



DEF. 2 DATI $A \subset \mathbb{R}$ E $x_0 \in \mathbb{R}$ DIREMO CHE

1) x_0 È INTERNO AD A SE $\exists \rho > 0$ t.c.

$$I_{x_0}(\rho) \subset A$$

2) x_0 È ESTERNO AD A SE $\exists \rho > 0$ t.c.

$$I_{x_0}(\rho) \cap A = \emptyset$$

→ 3) x_0 È DI FRONTIERA PER A SE $\forall \rho > 0$

$$I_{x_0}(\rho) \cap A \neq \emptyset \quad I_{x_0}(\rho) \cap A^c \neq \emptyset$$

(1) x_0 È DI FRONTIERA

(1) x_0 NON È NÉ INTERNO NÉ ESTERNO

$$\neg\left(\left(\exists \rho>0 \text{ t.c. } I_{x_0}(\rho)\subset A\right) \text{ o } \left(\exists \rho>0 \text{ t.c. } I_{x_0}(\rho)\subset A^c\right)\right) =$$

$$= \left(\neg\left(\exists \rho>0 \text{ t.c. } I_{x_0}(\rho)\subset A\right) \text{ e } \neg\left(\exists \rho>0 \text{ t.c. } I_{x_0}(\rho)\subset A^c\right)\right)$$

$$\left(\forall \rho>0 \quad I_{x_0}(\rho)\not\subset A\right) \text{ e } \left(\forall \rho>0 \quad I_{x_0}(\rho)\not\subset A^c\right)$$

$$\forall \rho \quad I_x(\rho)\cap A \neq \emptyset$$
$$\cap A^c \neq \emptyset$$

$\boxed{\text{DEF. 3}}$ DATI $A\subset\mathbb{R}$ E $x_0\in\mathbb{R}$ DIREMO CHE

1) x_0 È DI ACCUMULAZIONE PER A SE

$\forall \rho > 0 \quad I_{x_0}(\rho) \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset$

1) x_0 È P.T. ISOLATO DI A SE $x_0 \in A$ E NON È DI ACC. PER A.

$\mathring{A}$ PARTE INTERNA DI A

∂A FRONTIERA DI A

$\bar{A}$ CHIUSURA

DA DERIVATO DI A

$\boxed{\text{DEF. 4}}$ DATI $A \subseteq \mathbb{R}$ DIREMO CHE A È

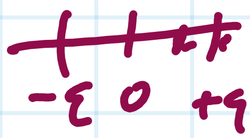
1) APERTO SE $A = \mathring{A}$

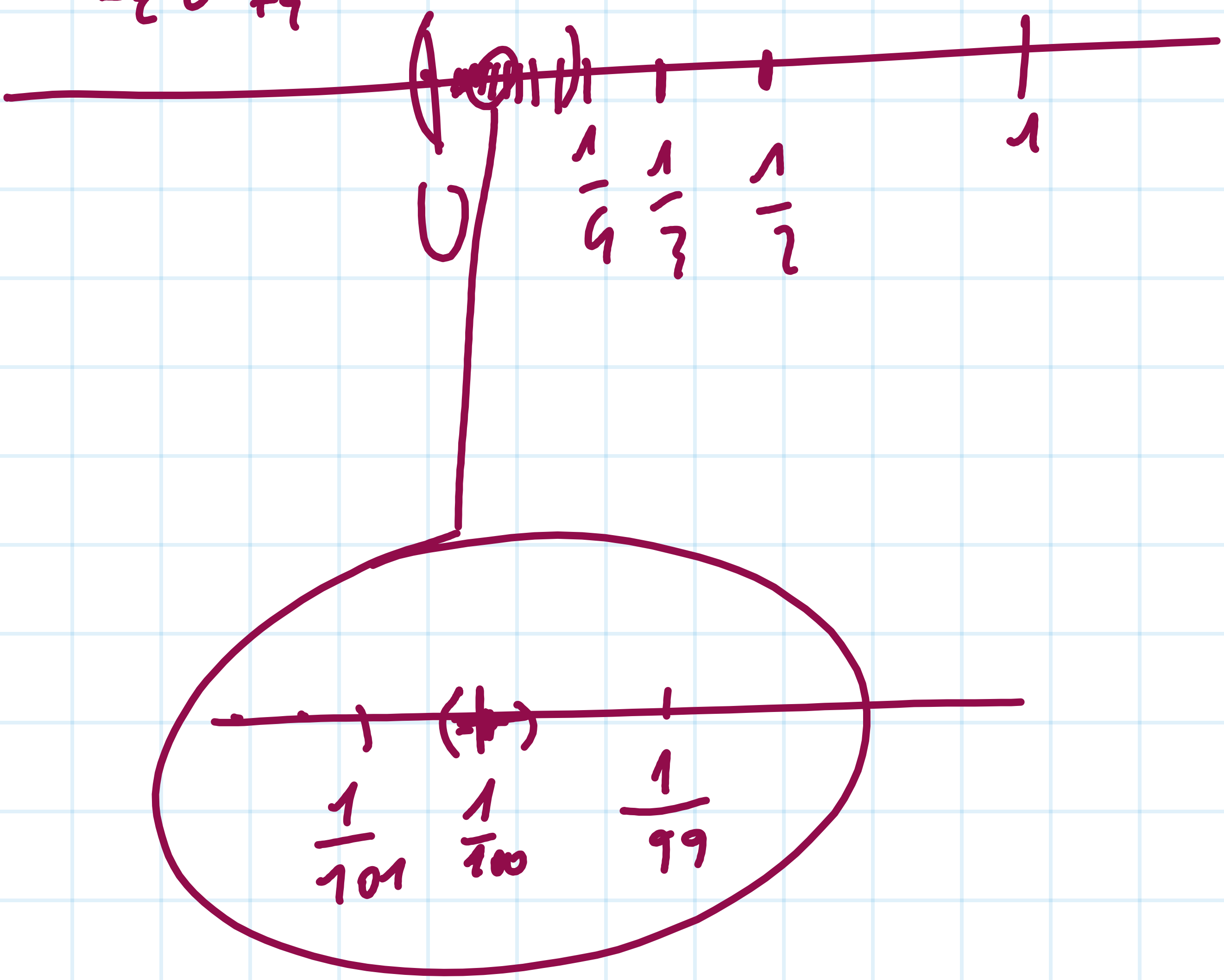
2) CHIUSO SE A^c È APERTO

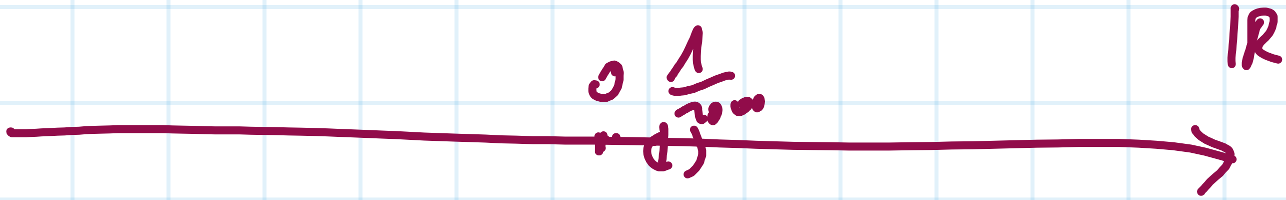
3) DENSO IN B SE $B \subset \bar{A}$

4) DISCRETO SE OGNI SUO PUNTO È ISOLATO.

$$A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$







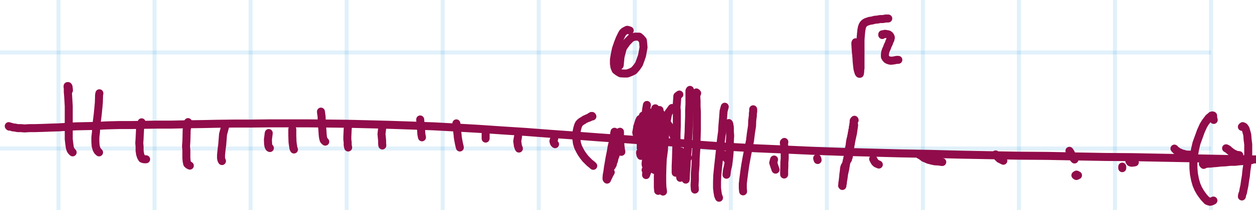
$$A = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$0 \notin A$$

$$\partial A = \{0\}$$

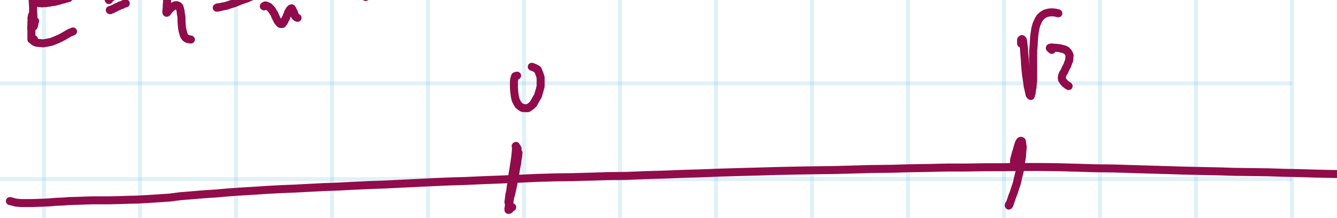
$$\mathring{A} = \mathbb{R} - \{0\} = A$$

$\underline{A = \mathbb{Q}}$



$$\frac{\sqrt{2}}{n}$$

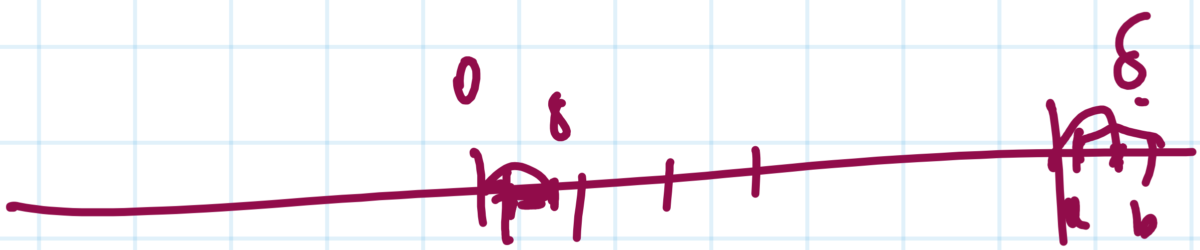
$E = \{ \frac{m\sqrt{2}}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^{+}, n \neq 0 \}$



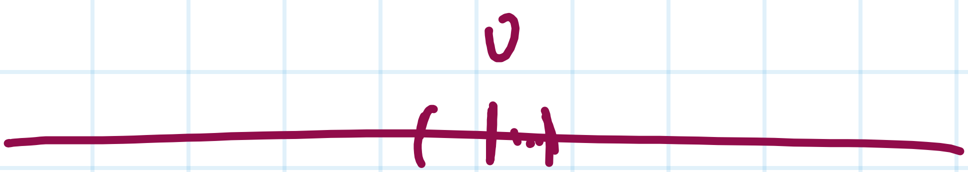
$\frac{m\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q}$

$\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

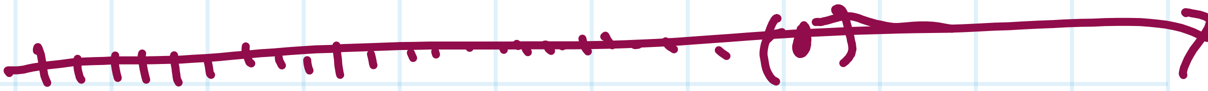
$\sqrt{2} = \frac{p \cdot n}{m \cdot q}$



$\frac{m\sqrt{2}}{n}$



$\boxed{\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}}$



T.1 (CARATT. DEI CHIUSI)

DATO $A \subset \mathbb{R}$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

1) A È CHIUSO (CIOÈ A^c È APERTO)

2) $\partial A \subset A$

$\Downarrow$

3) $DA \subset A$

DIM

OSS. $\partial A = \partial(A^c)$

$$(x \in \partial A) \iff \forall \rho > 0 \quad \begin{cases} I_x(\rho) \cap A \neq \emptyset \\ I_x(\rho) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$$

$$x \in \partial(A^c) \iff \forall \rho > 0 \quad \begin{cases} I_x(\rho) \cap A^c \neq \emptyset \\ I_x(\rho) \cap \underbrace{(A^c)^c}_{A} \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\partial A \subset A \iff \partial A \cap A^c = \emptyset \iff$$

$$\iff (\partial A^c) \cap (A^c) = \emptyset \iff A^c = (A^c)^\circ$$

$$\Updownarrow$$

A^c APERTO

$\boxed{\partial A \subset A} \overset{\Leftarrow}{\Rightarrow} DA \subset A$ (?)

(2) $\Rightarrow$ (3)

$x \in DA \overset{?}{\Rightarrow} x \in A$

2 casi:

$x \in \partial A \overset{(2)}{\Rightarrow} x \in A$

$x \notin \partial A \Rightarrow x \in \mathring{A} \Rightarrow x \in A$

$\boxed{x \in \mathring{A}}$

$x \in DA$

$\cancel{x \in \partial A}$

$\cancel{x}$

$\exists \rho > 0 \;\; I_x(\rho) \cap A = \emptyset$

$\boxed{DA \subset A} \Rightarrow \boxed{\partial A \subset A}$

P.A. sia $x \in DA$ ma $\boxed{x \notin A}$

$\forall \rho > 0 \;\; I_x(\rho) \cap A \neq \emptyset$

$I_x(\rho) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

$\Downarrow$

$x \in DA$

$\Downarrow$

$x \in A$

$\boxed{\text{TE.}}\boxed{2}$ DATI $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ CON

$A_i \subset A$

1) SE $\forall i$ A_i È APERTO (CHIUSO) $\bigcap A_i$ Aperto (Chiuso), $\bigcup A_i$ Aperto (Chiuso)

$\boxed{\text{DIM}}$

$x \in \bigcup A_i \overset{?}{\Rightarrow} x$ È INTERNO

$\Downarrow$

$\exists i \mid x \in \mathring{A}_i \Rightarrow x \in \mathring{A}_i \Rightarrow \exists\ I_r(p) \subset A_i$

$\cap$

$\cup$

$\underbrace{x \in \bigcap A_i}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $x \in (\bigcap A_i)^\circ$

$\Downarrow$

$x \in A_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Downarrow$

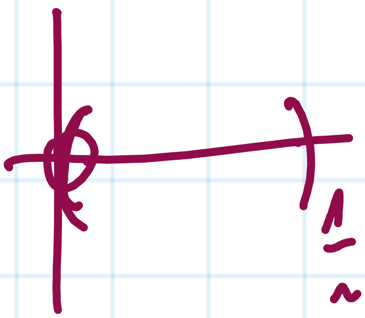
$\forall i = 1, \dots, n \quad \exists\, \rho_i > 0$ t.c. $I_r(\rho_i) \subset A_i$

Prendo $\rho = \min\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$

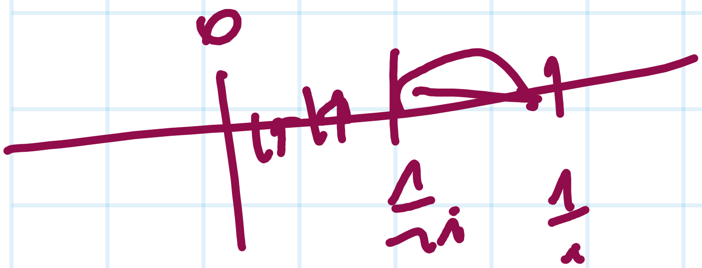
$$\underbrace{I_r(\rho) \subset I_r(\rho_i) \ \forall i}$$

$$I_r(\rho) \subset A_i \ \forall i$$

$$\Downarrow$$

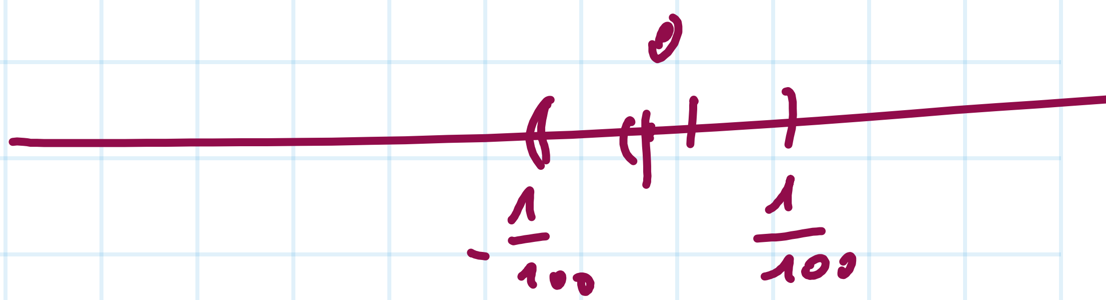


$$I_r(\rho) \subset \bigcap A_i$$



$$A_i = \left(\frac{1}{2i}, \frac{1}{i}\right)$$

$$A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$$



A_i clos

$$\underbrace{(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)}^c =$$

$$= (A_1^c) \cap (A_2^c \cap \dots \cap A_n^c = A_{open}$$

$$(\overline{A_1 \cap \dots \cap A_n})^c$$