Lezione 3: Proprietà di Q

INDICE

[... DA LEZIONE SCORSA]

- $\mathbb{N}$ È STABILE PER "+" E PER "."

1) DEF. DI $\mathbb{Z}$
2) DEF. DI $\mathbb{Q}$
3) $\mathbb{Q}$ È STABILE PER "+" E PER "."
4) $\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$
5) $\nexists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$
6) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^2 = 2$
7) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ È DENSO.
8) $\mathbb{Q}$ NON È COMPLETO.

PROSSIMA VOLTA

T. $\mathbb{N}$ È STABILE PER "+" E "·".

DIM

"+" $m \in \mathbb{N}$ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid m+n \in \mathbb{N}\}$ $A \overset{?}{=} \mathbb{N}$

BASTA MOSTRARE CHE A È INDUTTIVO

1) $1 \in A$ (?) SI PERCHÉ $\mathbb{N}$ È INDUTTIVO

2) $\overset{*}{n \in A} \overset{?}{\Rightarrow} n+1 \in A$ $m+(n+1) \in \mathbb{N}$?

$\Downarrow$

$m+n \in \mathbb{N}$

$m+(n+1) = (m+n)+1 \in \mathbb{N}$

PERCHÉ $m+n \in \mathbb{N}$ IN QUANTO VALE LA (*)

INOLTRE SICCOME $\mathbb{N}$ È INDUTTIVO SE $(n+m) \in \mathbb{N}$ ANCHE $(n+m)+1 \in \mathbb{N}$

A È INDUTTIVO

$\Downarrow$

$A \supset \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \supset A$

$\Rightarrow A = \mathbb{N}$

"$\cdot$" $n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot m \in \mathbb{N}$

m $\boxed{A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot m \in \mathbb{N}\}}$ $A \overset{?}{=} \mathbb{N}$

1) $1 \in A$ (SI PERCHÉ 1 È EL. NEUTRO DI "$\cdot$")

2) $\boxed{n \in A} \Rightarrow \underset{?}{\underline{n+1 \in A}}$

$(n+1) \cdot m \overset{?}{\in} \mathbb{N}$

$(n \cdot m) + (1 \cdot m) \overset{?}{\in} \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$? m

A INDUTTIVO

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N} \subset A \\ A \subset \mathbb{N} \end{array}\right] \Rightarrow A = \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Es.}}$ $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = ??$

$$1^3 = 1 = 1^2$$

$$1^3+2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$$

$$1^3+2^3+3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2$$

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2 =$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$A = \{ \underline{n \in \mathbb{N}} \mid 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \}$$

1) $1 \in A$?

2) $\boxed{n \in A} \Rightarrow \underbrace{n+1 \in A}_{?}$

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3}_{} \overset{?}{=} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{(1^3 + 2^3 + \dots + n^3)}_{\|} + (n+1)^3 =$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + (n+1)\right) =$$

$$= (n+1)^2 \, \frac{n^2+4n+4}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

DEF $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-$

DOVE $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}_- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\boxed{-n \stackrel{?}{=} (-1)\cdot n} \Leftarrow$

$(1+(-1)) = 0$

$\overbrace{(1+(-1))}\cdot n = 0$

$1\cdot n + (-1)\cdot n = 0$

$\overbrace{n} + \overbrace{(-1)}n = 0$

$(-1)\cdot n = -n$

$\frac{1}{n}$ = inverso molt. di n

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = m \cdot \frac{1}{n} \text{ CON } m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{Q}_- = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = -q \text{ CON } q \in \mathbb{Q}_+ \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$$

$\boxed{T.}$ $\mathbb{Q}$ È STABILE PER "+" E "$\cdot$".

$\underbrace{q_1 \cdot q_2}_{} \in \mathbb{Q}$ (con $q_1 \in \mathbb{Q}$, $q_2 \in \mathbb{Q}$) GRATIS SE $q_1 = 0$ O $q_2 = 0$

$q_1 \in \mathbb{Q}_+$ $\quad q_2 \in \mathbb{Q}_+ \longrightarrow q_2 = p \cdot \frac{1}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow q_1 = n \cdot \frac{1}{m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$

$\underline{q_1 \cdot q_2 \overset{?}{\in} \mathbb{Q}_+}$

$$q_1 \cdot q_2 = \left(n \cdot \frac{1}{m}\right) \cdot \left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = \left(\left(\frac{1}{m} \cdot n\right) \cdot p\right) \frac{1}{q} = \left(\frac{1}{m} \cdot (n \cdot p)\right) \cdot \frac{1}{q} =$$

$$= \left((n \cdot p)\left(\frac{1}{m}\right)\frac{1}{q}\right) = (n \cdot p) \cdot \overline{\left(\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{q}\right)} = (n \cdot p) \cdot \overline{\frac{1}{(m \cdot q)}} \in \mathbb{Q}_+$$

$$\boxed{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{q}} \overset{?}{=} \frac{1}{(m\cdot q)}$$

$$\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{q}\right)\cdot(m\cdot q) = \left(\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{q}\right)\cdot m\right)\cdot q = \left(\left(\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{m}\right)\cdot m\right)\cdot q =$$

$$= \left(\frac{1}{q}\cdot\left(\frac{1}{m}\cdot m\right)\right) q = \left(\frac{1}{q}\cdot 1\right)\cdot q = \frac{1}{q}\cdot q = 1$$

$$\underset{\substack{\cup\\ \mathbb{Q}_+}}{q_1}\cdot\underset{\substack{\cup\\ \mathbb{Q}_-}}{q_2} = \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{Q}_+}}{q_1}\cdot(\underbrace{-q_3}_{\mathbb{Q}_+}) = q_1\cdot\left((-1)\cdot q_3\right) = \left(q_1\cdot(-1)\right)\cdot q_3 =$$

$$= \left((-1)\cdot q_1\right)\cdot q_3 = (-1)\cdot(q_1\cdot q_3) = -(q_1\cdot q_3)$$

$q_1 \in \mathbb{Q}_-$, $q_2 \in \mathbb{Q}_-$

$q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_+$

$q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}$

$q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}_+$

$q_1 = m \cdot \frac{1}{n}$

$q_2 = p \cdot \frac{1}{q}$

$$q_1 + q_2 = \left(m \cdot \frac{1}{n}\right) + p \cdot \frac{1}{q} =$$

$$= \left((m \cdot q) \cdot \frac{1}{n\,q}\right) + \left(np \cdot \frac{1}{n \cdot q}\right) =$$

$$= \left(\underbrace{m \cdot q + n \cdot p}_{\in \mathbb{N}}\right) \underbrace{\frac{1}{n \cdot q}}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_+$$

$$m \cdot \frac{1}{n} \overset{?}{=} (m \cdot q) \cdot \frac{1}{n \cdot q} = (m \cdot q)\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{q}\right) = (m \cdot q) \cdot \left(\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{n}\right) =$$

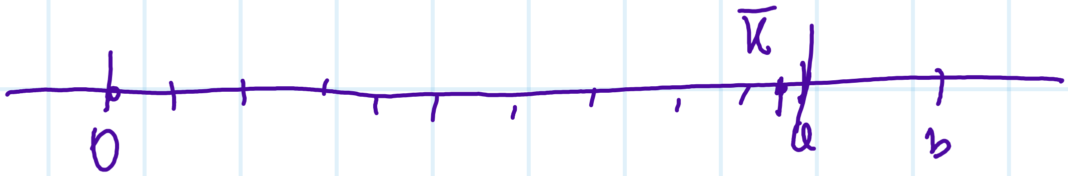
$$= \left((m \cdot q) \cdot \frac{1}{q}\right) \frac{1}{n} = \left(m \cdot \left(q \cdot \frac{1}{q}\right)\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= (m \cdot 1) \cdot \frac{1}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$$

T. $\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$, CIOÈ $\forall a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$ $\exists q\in\mathbb{Q}$ t.c. $a<q<b$

DIM. $0<a<b$ $\qquad \delta = b-a$

$\exists n\in\mathbb{N}$ t.c. $0<\frac{1}{n}<\delta$



$k\cdot\frac{1}{n}$ $\qquad \bar{k}\cdot\frac{1}{n} < a < \underbrace{(\bar{k}+1)\frac{1}{n} \ ?\ b}$

$(\bar{k}+1)\cdot\frac{1}{n}$

DIM P.A. SUPPONIAMO CHE $\boxed{(\bar{k}+1)\frac{1}{n} \geq b}$

$(\bar{k}+1)\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} = 1\cdot\frac{1}{n} = \left((\bar{k}+1)-\bar{k}\right)\frac{1}{n} = (\bar{k}+1)\cdot\frac{1}{n} - \bar{k}\cdot\frac{1}{n} \geq b - \bar{k}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$=(b-a)+\left(a-\bar{k}\cdot\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \delta + \left(\underbrace{a-\bar{k}\cdot\frac{1}{n}}_{>0}\right) > \delta$$ (ASSURDO)

$A = \left\{ k \cdot \frac{1}{n} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$ NON È SUP. LIMITATO

P.A. SE FOSSE SUP. LIMITATO $\exists^{\text{sarebb.}}$ $\lambda = \sup(A)$

$\uparrow$
$\mathbb{R}$

λ È MAGGIORANTE

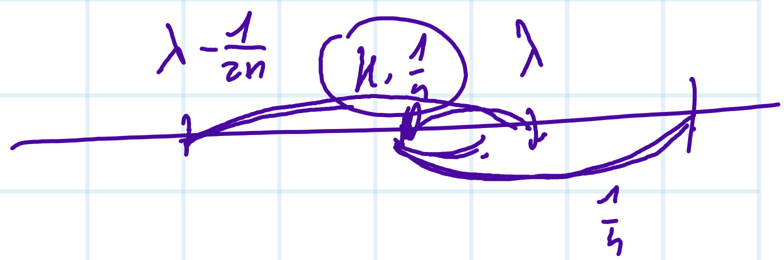
$\lambda - \varepsilon$ NON È MAGGIORANTE PER ALCUN $\varepsilon > 0$

$\varepsilon = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$ PERCHÉ $2n > n$

$\lambda - \frac{1}{2n}$ NON È MAGGIORANTE PER A

$\Downarrow$

$\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. $k \cdot \frac{1}{n} > \lambda - \frac{1}{2n}$



$(k+1) \cdot \frac{1}{n}$

$$\boxed{(n+1)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$\vdots$$

$$= \overbrace{(n+1)\cdot\frac{1}{n} - n\cdot\frac{1}{n}} + n\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \left((n+1)-n\right)\cdot\frac{1}{n} + n\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} + \overline{\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)} > \frac{1}{n} + \overline{\left(\lambda - \frac{1}{2n}\right)} =$$

$$= \lambda + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) > \lambda$$

(Ass.)