Lezione 2: R e i suoi sottoinsiemi

INDICE DELLA LEZIONE

1) $\mathbb{R}$

   a) DEF.

   b) VERIFICA DI ALCUNE PROPRIETÀ:

      b_1) UNICITÀ 0

      b_2) $0 \cdot a = 0$

      b_3) $(-1) \cdot a = -a$

      b_4)

2) $\mathbb{N}$

   a) DEF

   b) VERIFICA DI ALCUNE PROPRIETÀ

      b_1) $\mathbb{N}$ È INDUTTIVO

      b_2) STABILITÀ RISPETTO A "+"

      b_3) STABILITÀ RISPETTO A "·"

      b_4) NON LIMITATEZZA

      b_5) PROPRIETÀ ARCHIMEDEA

3) DEF. DI $\mathbb{Z}$ E $\mathbb{Q}$

4) DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$

$"+" : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$\boxed{\text{DEF. 1}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

1) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in \mathbb{R}$ $a+0=0+a=a$ (esist. el. neutro)
2) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $(a+b)+c = a+(b+c)$ (assoc.)
3) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b=0$ (es. inverso
4) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $a+b=b+a$ (commut.)
5) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in \mathbb{R}-\{0\}$ $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$
6) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\,c)$
7) $\forall a \in \mathbb{R}-\{0\}$ $\exists b \in \mathbb{R}-\{0\}$ t.c. $a\cdot b=1$
8) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $a\cdot b = b\cdot a$
9) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

$\boxed{\text{T1}}$ EL. NEUTRO ADDIZIONE È UNICO

$\boxed{\text{DIM}}$ P.A. SIA $0'$ EL NEUTRO

$$\underset{\substack{\uparrow\\1}}{0' =} 0 + 0' = 0' + 0 = 0$$

$0'$ è el neutro

perché 0 è el neutro

$\boxed{\text{T.2}}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $a\,0 = 0\cdot a = 0$

$$\boxed{a\cdot 0} = a\cdot(0+0) = \boxed{a\cdot 0 + a\cdot 0}$$

$$\boxed{\exists b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } b + (a \cdot 0) = 0}$$

$$\boxed{0} = b + (a \cdot 0) = b + \left((a \cdot 0) + (a \cdot 0)\right) = \left(b + (a \cdot 0)\right) + (a \cdot 0) =$$

$$= 0 + (a \cdot 0) = \boxed{a \cdot 0}$$

DEF. 2 UNA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SU A SI DICE "DI ORDINE" SE

1) $\forall a \in A \quad a \mathcal{R} a$
2) $\forall a, b \in A$ SE $a \mathcal{R} b$ E $b \mathcal{R} a$ ALLORA $a = b$
3) $\forall a, b, c \in A$ SE $a \mathcal{R} b$ E $b \mathcal{R} c$ ALLORA $a \mathcal{R} c$

INOLTRE $\mathcal{R}$ SI DICE "TOTALE" SE

$\forall a, b \in A$ SI HA SEMPRE O $a \mathcal{R} b$ O $b \mathcal{R} a$

10) "$\leq$" È UNA REL. D'ORDINE TOTALE

11) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

12) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c. $0 \leq a, 0 \leq b, 0 \leq c$ SI HA CHE

$$a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

DEF. 1 $\forall a \in \mathbb{R}$ DIREMO CHE "a È POSITIVO" SE $0 \leq a$

E CHE "È NEGATIVO" SE $a \leq 0$.

$\boxed{T.3}$ $0 \leq a$ E $0 \leq b$ ALLORA $\boxed{0 \leq a \cdot b}$

$\boxed{\text{DIM}}$

$$0 = \overbrace{0 \cdot b \leq a \cdot b}^{0 \leq a}.$$

$\boxed{\text{DEF.2}}$ SIA $(M, \leq)$ UNA REL. DI ORDINE TOTALE

E SIANO $A \subset M$ e $a \in M$. DIREMO CHE

1) a E MINIMO (MASSIMO) DI A SE $a \in A$ e $\forall x \in A$ SI HA

$a \leq x$

$(x \leq a)$

2) a E MINORANTE (MAGGIORANTE) DI M SE $\forall x \in M$ SI HA $a \leq x$ $(x \leq a)$

3) INOLTRE DIREMO CHE a È ESTREMO INFERIORE (SUPERIORE) DI A $(\text{INF}(A))$ $\text{SUP}(A)$

SE a È IL MASSIMO DEI MINORANTI DI A.

(MINIMO DEI MAGGIORANTI)

13) $\forall A \subset \mathbb{R}$ SE A È $\underbrace{\text{INFERIORMENTE (SUPERIORMENTE) LIMITATO}}$ ALLORA $\text{INF}(A)$ $\text{SUP}(A)$ ESISTE

$(\exists \lambda \in \mathbb{R}$ MINORANTE (MAGGIORANTE) DI $A)$

DEF 4 UN INSIEME $A \subset \mathbb{R}$ SI DICE INDUTTIVO SE

1) $1 \in A$

2) $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$

DEF 5 DEFINIAMO $\mathbb{N} = \bigcap\limits_{(A \text{ È INDUTTIVO})} A$

T. $\mathbb{N}$ È INDUTTIVO

1) $1 \in \mathbb{N}$? SI PERCHÉ GLI A SONO TUTTI INDUTTIVI QUINDI $1 \in A \ \forall A$, QUINDI

$$1 \in \bigcap_{A \text{ È INDUTTIVO}} A = \mathbb{N}$$

2) $x \in \mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} x+1 \in \mathbb{N}$

$$\Downarrow$$

$$\forall A \ \ x \in A \Rightarrow \forall A \ \ x+1 \in A \Rightarrow x+1 \in \bigcap_{A \text{ È INDUTTIVI}} A = \mathbb{N}$$

T(m) $\mathbb{N}$ NON È SUP. LIMITATO

$\mathbb{R}$ È COMPLETO

DIM. P.A. SIA $\mathbb{N}$ SUP. LIMITATO. $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$\lambda = \sup(\mathbb{N}) \Rightarrow \lambda - 1$ NON È MAGGIORANTE $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}$ t.c. $\lambda - 1 \leq x \Rightarrow \lambda \leq x+1 \in \mathbb{N}$ (ASS.)

PERCHÉ $\mathbb{N}$ È INDUTTIVO

$\boxed{T.(n°1)}$ (PROP. ARCHIMEDEA)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\boxed{DIM}$

$\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{\varepsilon}$ INV. MOLT. DI ε E SI HA $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ PER LA REGOLA DEI SEGNI.

$\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$ $\left(\cancel{n \geq \frac{1}{\varepsilon}}\right)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon}$$

$1 = 1 \cdot 1$

T. $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

$\boxed{DIM.}$ $\boxed{\frac{1}{y} \geq \frac{1}{x}}$

$$\frac{1}{y}\cdot(x \cdot y) \geq \frac{1}{x}\cdot(x \cdot y) = \dots = y$$

$$\frac{1}{y}\cdot(x \cdot y) = \frac{1}{y}(y \cdot x) = \left(\frac{1}{y}\cdot y\right)\cdot x = 1 \cdot x = x$$

$\boxed{ASS.}$