Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 32

Titolo nota 15/08/2014

25 maggio 2020 (11.00-12.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

TEO.1 (TEOREMA PONTE)

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}$ DI ACC. PER Ω, $\ell \in \mathbb{R}^m$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$

(b) $\forall (x_k)$ A VALORI IN $\Omega - \{\bar{x}\}$, $x_k \to \bar{x} \Rightarrow f(x_k) \to \ell$

DIMO

$\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ DIRE CHE VALE (a) SIGNIFICA CHE

(1) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega - \{\bar{x}\}$ $d(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$

QUINDI, SE PRENDO (x_k) IN $\Omega - \{\bar{x}\}$ TALE CHE $x_k \to \bar{x}$, DEFINITIVAMENTE IN k SI AVRÀ $d(x_k, \bar{x}) < \delta$ E, DI CONSEGUENZA, $d(f(x_k), \ell) < \varepsilon$, GRAZIE A **(1)**.

QUINDI VALE (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE (a) SIA FALSA. ALLORA:

$\exists \varepsilon_0 > 0$ TALE CHE $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\exists x_k \in \Omega - \{\bar{x}\}$ T.C. $d(x_k, \bar{x}) < \frac{1}{k}$ MA $d(f(x_k), \ell) \geq \varepsilon_0$

LA SUCCESSIONE (x_k) COSÌ COSTRUITA È A VALORI IN $\Omega - \{\bar{x}\}$, TENDE A $\bar{x}$, MA $f(x_k)$ NON TENDE A ℓ, IN CONTRADDIZIONE CON (b).

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE (a) SIA FALSA. QUINDI (a) È VERA.

OSS.1 LA VERSIONE DEL TEO.1 PER LE FUNZIONI CONTINUE HA, COME NEL CASO DI 1 VARIABILE, LEGGERE MODIFICHE, E LA DIMOSTRAZIONE (CHE OMETTIAMO) È QUASI IDENTICA:

TEO.2

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) f È CONTINUA IN $\bar{x}$

(b) $\forall (x_k)$ A VALORI IN Ω, $x_k \to \bar{x} \Rightarrow f(x_k) \to f(\bar{x})$

OSS. 2 GRAZIE AL TEO. PONTE DIVENTA IMMEDIATA LA DIMOSTRAZIONE DEL SEGUENTE

TEO. 3 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$, x_0 DI ACC. PER Ω, y_0 DI ACC. PER A, $g: \Omega \to A$, $f: A \to \mathbb{R}^k$ ED $\ell \in \mathbb{R}^k$ TALI CHE:

(a) $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$

(b) $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$

SI SUPPONGA INOLTRE CHE VALGA ALMENO UNA DELLE 2 SEGUENTI CONDIZIONI:

(C_1) $\exists\, r > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega$ $d(x, x_0) < r \Rightarrow g(x) \neq g(x_0)$

(C_2) $y_0 \in \Omega$ ED f CONTINUA IN y_0

ALLORA SI HA ANCHE: $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \ell$.

DIMO

CASO (C_1) GRAZIE AL TEO. PONTE, QUELLO CHE DOBBIAMO DIMOSTRARE È CHE, COMUNQUE PRESA

(2) (x_h) A VALORI IN $\Omega - \{x_0\}$ T.C. $x_h \to x_0$

SI HA:

(3) $$f(g(x_h)) \to \ell$$

PRESA DUNQUE (x_h) CON LE PROPRIETÀ **(2)**, GRAZIE AD (a) E AL TEOREMA PONTE POSSIAMO DIRE CHE:

$$g(x_h) \to y_0$$

INOLTRE GRAZIE A (C_1) POSSIAMO DIRE CHE, DEFINITIVAMENTE IN h, $g(x_h) \neq y_0$, QUINDI LA SUCCESSIONE IMMAGINE $(g(x_h))_{h \in \mathbb{N}}$ È A VALORI IN $A - \{y_0\}$ E TENDE A y_0.

MA ALLORA, GRAZIE A (b) E AL TEO. PONTE, SI HA $f(g(x_h)) \to \ell$, CHE È QUANTO VOLEVAMO DIMOSTRARE.

CASO (C_2) OVVIAMENTE LA COSA DA DIMOSTRARE È ANCORA CHE **(2) ⇒ (3)**. STAVOLTA È PIÙ SEMPLICE.

PRESA (x_h) CHE SODDISFI **(2)**, GRAZIE AD (a) E AL TEO. PONTE SI HA $g(x_h) \to y_0$, DOPODICHÉ GRAZIE A (C_2) E (b) SI HA $f(g(x_h)) \to f(y_0) = \ell$.

ES. 1 CALCOLARE $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$.

SVOLGIMENTO

$\frac{\sin(xy)}{xy} = f(g(x,y))$ DOVE $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ E $g(x,y) = xy$, FACENDO ATTENZIONE AL FATTO CHE g NON È DEFINITA SU $\mathbb{R}^2$ MA SU $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid x=0 \text{ o } y=0\}$

DETTO QUESTO, VISTO CHE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ E CHE $\forall (x,y) \in \Omega$ SI HA $g(x,y) \neq 0$,

GRAZIE AL TEO. 3 POSSO SCRIVERE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

DEF. 1 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x_0 DI ACC. PER Ω, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ TALI CHE f E g SONO INFINITESIME PER $x \to x_0$ E $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \Omega - \{x_0\}$. DIREMO CHE $f(x) = o(g(x))$ PER $x \to x_0$ SE $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

OSS. 3 VALGONO ANCORA TUTTE LE REGOLE DELL'ALGEBRA DEGLI O-PICCOLI, ESATTAMENTE COME IN UNA VARIABILE. INVECE QUELLO CHE È DIVERSO È IL RICONOSCERE CHI È O-PICCOLO DI CHI.

VEDIAMO ALCUNI ESEMPI.

ES. 2 DATI $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0\}$, SU Ω PRENDIAMO $f(x,y) = x^3y^7$ E $g(x,y) = x^4y^5$.
CHI È O-PICCOLO DI CHI PER $(x,y)\to(0,0)$ SU Ω? E SU $\Omega' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<y<x\}$?

SVOLGIMENTO

SU Ω SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^7}{x^4y^5} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} = \text{NON ESISTE}$$

INFATTI SE MI RESTRINGO ALL'INSIEME $A = \{(x,y) \in \Omega \mid x = y^2\}$ IL LIMITE VIENE 1

MENTRE SE MI RESTRINGO ALL'INSIEME $B = \{(x,y) \in \Omega \mid x = y\}$ IL LIMITE VIENE 0.

QUINDI $f(x,y)$ NON È O-PICCOLO DI $g(x,y)$ PER $(x,y)\to(0,0)$.

TUTTAVIA NEMMENO $g(x,y)$ È O-PICCOLO DI $f(x,y)$, VISTO CHE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^5}{x^3y^7} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y^2} = \text{NON ESISTE} \quad \left(\text{ANALOGAMENTE A PRIMA}\right)$$

INVECE SU Ω' SI HA $f(x,y) = o(g(x,y))$ PERCHÉ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} = 0$$

PERCHÉ SU Ω' SI HA $x>0$ E $0<y<x$ QUINDI

$$0 < \frac{y^2}{x} < \frac{x^2}{x} = x \to 0$$

PER $x \to 0$

ES. 3 SIA $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. DIRE PER QUALI $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ SI HA:

(4) $$|x|^\alpha |y|^\beta = o(x^4 + y^4)$$

SVOLGIMENTO

MOSTRIAMO CHE **(4)** VALE PER TUTTE E SOLE LE COPPIE (α, β) TALI CHE $\alpha + \beta > 4$.

PRIMA MOSTRIAMO CHE SE $\alpha+\beta \le 4$ LA **(4)** NON VALE, CIOÈ NON È VERO CHE

(5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^4 + y^4} = 0$$

INFATTI SE FOSSE VERO **(5)** ALLORA IL LIMITE DOVREBBE FARE 0 LUNGO OGNI RESTRIZIONE, ANCHE SULL'INSIEME $A = \{(x,y) \in \Omega \mid y = x\}$ TUTTAVIA, RESTRINGENDOSI AD A IL LIMITE DIVENTA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha \cdot |x|^\beta}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha+\beta}}{2 \cdot x^4} \ne 0 \quad \text{SE } \alpha+\beta \le 4.$$

QUINDI SE $\alpha+\beta \le 4$ LA **(5)** NON VALE.

MOSTRIAMO ORA CHE SE $\alpha+\beta > 4$, INVECE VALE.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE SE $\alpha+\beta = 4$ LA FUNZIONE

(6) $$G(x,y) = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^4 + y^4}$$

HA LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

(7) $$\forall \lambda > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \qquad G(\lambda x, \lambda y) = G(x,y)$$

LE FUNZIONI CHE HANNO TALE PROPRIETÀ VENGONO DETTE POSITIVAMENTE OMOGENEE DI GRADO 0

INFATTI:

$$G(\lambda x, \lambda y) = \frac{|\lambda x|^\alpha \cdot |\lambda y|^\beta}{(\lambda x)^4 + (\lambda y)^4} = \frac{\lambda^{\alpha+\beta} \cdot |x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{\lambda^4 (x^4 + y^4)} \overset{\alpha+\beta=4}{=} \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^4 + y^4}$$

TALE PROPRIETÀ SIGNIFICA ESSENZIALMENTE CHE $G(x,y)$ È COSTANTE SU OGNI SEMIRETTA CHE NASCE DALL'ORIGINE. QUINDI L'INSIEME DEI VALORI ASSUNTI SU TUTTO $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ COINCIDE CON L'INSIEME DEI VALORI ASSUNTI SU $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

SI NOTI CHE Γ È COMPATTO E $G(x,y)$ È CONTINUA SU Γ, PERCHÉ QUOZIENTE DI FUNZIONI CONTINUE DI CUI QUELLA AL DENOMINATORE È SEMPRE NON NULLA. QUINDI PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS $G|_\Gamma$ HA MASSIMO E MINIMO, QUINDI È LIMITATA SU Γ.

MA GRAZIE A **(7)**, SE È LIMITATA SU Γ, LO È ANCHE SU TUTTO $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

SIAMO ORA PRONTI A MOSTRARE CHE SE $\alpha+\beta>4$ ALLORA VALE **(5)**. SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\alpha}\cdot|y|^{\beta}}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{|x|^{a}\cdot|y|^{b}}{x^4+y^4}} \cdot \boxed{|x|^{\alpha-a}\cdot|y|^{\beta-b}}$$

SICCOME $\alpha+\beta>4$ HO PRESO a E b IN MODO CHE: $0\leq a\leq\alpha$, $0\leq b\leq\beta$ E $a+b=4$

PERCHÉ: $(\alpha-a)+(\beta-b) = \alpha+\beta-(a+b) = \alpha+\beta-4>0$

PERCHÉ $a+b=4$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\text{FUNZIONE LIMITATA}} \cdot \boxed{\text{FUNZIONE INFINITESIMA}} = 0$$

PER CHIUDERE L'ARGOMENTAZIONE RESTA ORA IL TEOREMA:

TEO. 4 (WEIERSTRASS)

SE $K\subset\mathbb{R}^n$ È COMPATTO E $f:K\to\mathbb{R}^m$ È CONTINUA ALLORA $f(K)$ È COMPATTO.

IN PARTICOLARE, SE $m=1$ ALLORA f HA MASSIMO E MINIMO.

DIMO

OMESSA, PERCHÈ FORMALMENTE IDENTICA A QUELLA PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE.