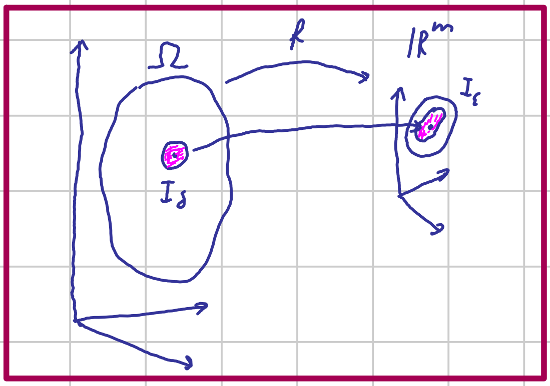
22 maggio 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI



DEF.1 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER Ω, $f:\Omega \to \mathbb{R}^m$ ED $\ell \in \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ SE:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ TALE CHE $\boxed{f\left(I_\delta(x_0) \cap (\Omega - \{x_0\})\right) \subset I_\varepsilon(\ell)}$

AL POSTO DI ■ SI POTEVA ANCHE SCRIVERE: ■

$\boxed{\forall x \in \Omega - \{x_0\}\ \left(d(x,x_0) < \delta\right) \Rightarrow \left(d(f(x),\ell) < \varepsilon\right)}$

DEF.2 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ ED $f:\Omega \to \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE f È CONTINUA IN x_0 SE

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ TALE CHE $\boxed{f\left(I_\delta(x_0) \cap \Omega\right) \subset I_\varepsilon(f(x_0))}$. INOLTRE DIREMO CHE f È CONTINUA SE È CONTINUA $\forall x_0 \in \Omega$.

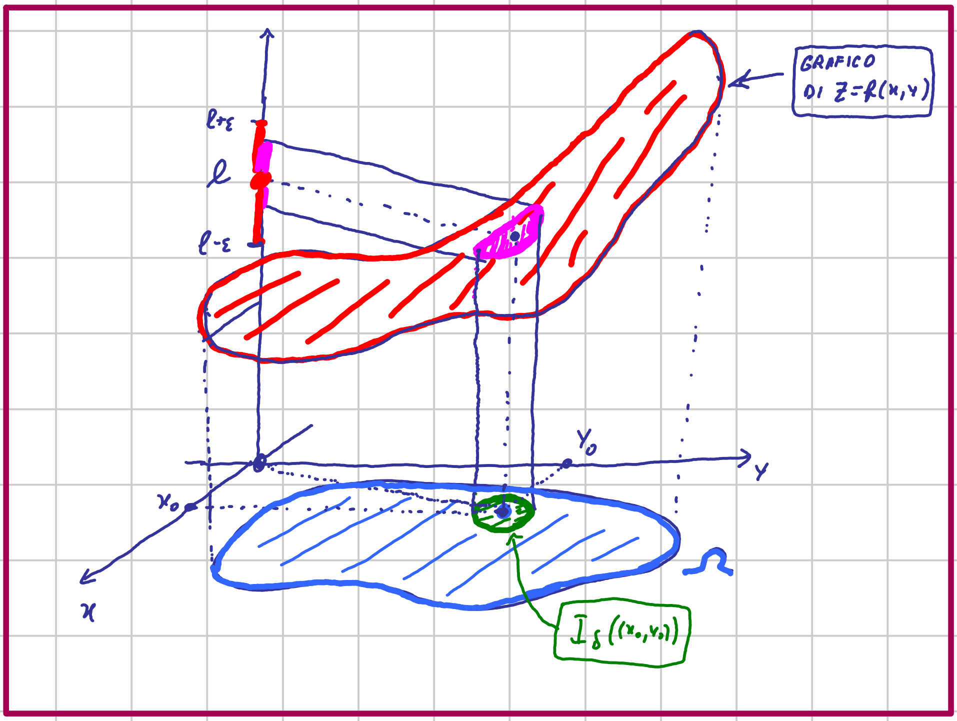
AL POSTO DI ■ SI POTEVA ANCHE SCRIVERE ■

$\boxed{\forall x \in \Omega \quad d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(x_0)) < \varepsilon}$

OSS.1 PER CAPIRE BENE È UTILE VISUALIZZARE IL CASO $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ED $f:\Omega \to \mathbb{R}$.

NELLA FUNZIONE IN FIGURA SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$



OSS. 2 PIÙ IN GENERALE SI POSSONO TRATTARE ANCHE I CASI IN CUI $x \to \infty$, OPPURE $f(x) \to \infty$, TENENDO PRESENTE CHE QUANDO LO SPAZIO DI ARRIVO È $\mathbb{R}$ HA ANCORA SENSO DISTINGUERE TRA $+\infty$ E $-\infty$. IN SEGUITO DIAMO ALCUNE DI QUESTE DEFINIZIONI LASCIANDO ALLO STUDENTE DI COMPLETARE LA CASISTICA.

DEF. 3 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, CON Ω NON LIMITATO, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ED $\ell \in \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$ SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega \quad d(x, 0) > r \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$

DEF. 4 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER Ω ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ SE $\forall r > 0 \ \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega - \{x_0\} \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), 0) > r$

DEF. 5 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER Ω ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DIREMO CHE

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ SE $\forall r > 0 \ \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega - \{x_0\} \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > r$

ES. 1 SIA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ LA FUNZIONE COSTANTE TALE CHE $f(x,y) = 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

f È (OVVIAMENTE) CONTINUA IN TUTTI I PUNTI (x_0, y_0) PERCHÉ $\forall (x,y)$ E $\forall (x_0, y_0)$ $|f(x,y) - f(x_0, y_0)| = 0$

QUINDI L'IMPLICAZIONE $\quad d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon \quad$ VALE SEMPRE.

ES. 2 SIA $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto y \end{array}$ È CONTINUA IN TUTTI I PUNTI (x_0, y_0), VISTO CHE, $\forall (x,y)$ E $\forall (x_0, y_0)$ SI HA:

$$d(f(x,y), f(x_0,y_0)) = |f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |y - y_0| \le d((x,y),(x_0,y_0))$$

QUINDI $\forall \varepsilon > 0$ BASTA PRENDERE $\delta = \varepsilon$ PERCHÉ VALGA L'IMPLICAZIONE:

$$d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow d(f(x,y), f(x_0,y_0)) < \varepsilon$$

ES. 3 CALCOLARE $\lim\limits_{(x,y) \to \infty} \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$.

IL LIMITE RICHIESTO VALE 0, INFATTI $\forall \varepsilon > 0$, SE PRENDO $r = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, SI HA CHE

$$d((x,y), 0) > r \Leftrightarrow x^2 + y^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

CIOÈ:

$$d((x,y), 0) > r \Rightarrow d(f(x,y), \ell) < \varepsilon$$

OSS. 3 SI TRATTEREBBE ORA DI SVILUPPARE LA TEORIA DEI LIMITI IN PIÙ VARIABILI COME È STATO FATTO IN UNA VARIABILE. CIÒ È LUNGO E NON SEMPRE ISTRUTTIVO, VISTO CHE MOLTI TEOREMI SONO FORMALMENTE IDENTICI (ANCHE NELLA DIMOSTRAZIONE). PER SVELTIRE LA COSA PROCEDEREMO COSÌ: MOSTREREMO ALLO STUDENTE ALCUNI ESEMPI DI CALCOLO DI LIMITI SCELTI IN MODO TALE CHE CIASCUNO DI ESSI CI OBBLIGHI A INTRODURRE ALCUNI TEOREMI (O IDEE).

ES. 4 CALCOLARE, SE ESISTE, IL LIMITE: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cdot y^3}{x^4+y^4}$

USEREMO QUESTO LIMITE COME SCUSA PER RICORDARE ALLO STUDENTE I TEOREMI SULLE OPERAZIONI SUI LIMITI

SVOLGIMENTO

OSSERVIAMO CHE VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$2x^2y^2 \leq x^4 + y^2$$

VISTO CHE:

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 \geq 0$$

DI CONSEGUENZA, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, SI HA:

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2y^2}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4+y^4}{x^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

CIOÈ LA FUNZIONE $g(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ È LIMITATA.

QUINDI IL LIMITE DA CALCOLARE DIVENTA

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\boxed{\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}}}_{\text{FUNZIONE LIMITATA}} \cdot \boxed{y} = 0$$

$y \to 0$ PERCHÈ CONTINUA E NULLA IN $(0,0)$

DOVE PER CONCLUDERE ABBIAMO INVOCATO IL FATTO CHE IL PRODOTTO TRA UNA FUNZIONE LIMITATA E UNA FUNZIONE INFINITESIMA, FORNISCE UNA FUNZIONE INFINITESIMA.

ORA PRENDIAMO SPUNTO DA CIÒ PER ENUNCIARE E DIMOSTRARE QUESTO SEMPLICE TEOREMA, CHE RIENTRA NELLA CATEGORIA "OPERAZIONI TRA LIMITI". COME UTILE ESERCIZIO LASCIAMO ALLO STUDENTE IL COMPITO DI ENUNCIARE E DIMOSTRARE GLI ALTRI TEOREMI SULLE OPERAZIONI TRA LIMITI.

TEO. 1 DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER Ω, ED $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ TALI CHE:

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

(2) $\exists^{\text{no}}\, r > 0$ ED $M > 0$ TALI CHE $|g(x)| < M$ PER OGNI $x \in I_r(x_0) \cap \Omega$

CIOÈ g È LIMITATA IN UN INTORNO DI x_0

ALLORA $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

DIMO $\forall \varepsilon > 0$ PRENDO $\delta_1 > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega \; d(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow d(f(x), 0) < \frac{\varepsilon}{M}$ (POSSO FARLO GRAZIE A (1)).

PRENDO ORA $\delta = \min\{\delta_1, r\}$, COSICCHÈ $\forall x \in \Omega$, SE $d(x, x_0) < \delta$ VALE SIA $|g(x)| < M$ SIA $d(f(x), 0) < \frac{\varepsilon}{M}$,

E QUINDI ANCHE:

$$d(f(x) \cdot g(x), 0) = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

CHE È CIÒ CHE VOLEVAMO DIMOSTRARE.

ES. 5 CALCOLARE, SE ESISTE: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

SVOLGIMENTO

USEREMO QUESTO ESEMPIO PER INTRODURRE L'IDEA CHE IL LIMITE DI f NON CAMBIA PASSANDO AD UNA RESTRIZIONE (LO DIMOSTREREMO ALLA FINE)

NEL NOSTRO CASO OSSERVIAMO CHE $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, RISTRETTA ALL'ASSE x È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA, MENTRE RISTRETTA ALLA RETTA $y = x$ SI HA

$$f(x, x) = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

CIÒ SIGNIFICA CHE:

$$f(x,y) \to 0 \quad \text{SE} \quad (x,y) \to (0,0) \quad \text{RIMANENDO SULL'ASSE } x$$

$$f(x,y) \to \frac{1}{2} \quad \text{SE} \quad (x,y) \to (0,0) \quad \text{RIMANENDO SULLA BISETTRICE } y = x$$

QUINDI:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) \quad \text{NON ESISTE}$$

PERCHÉ SE ESISTESSE DOVREBBE AVERE LO STESSO VALORE LUNGO TUTTE LE RESTRIZIONI.

QUESTO GRAZIE AL SEGUENTE:

TEO. 2 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER Ω, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ED $\ell \in \mathbb{R}^m$ TALE CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
SIA POI $A \subset \Omega$ TALE CHE x_0 È DI ACCUMULAZIONE ANCHE PER A. ALLORA ANCHE $f|_A \to \ell$ PER $x \to x_0$.

DIMO

SICCOME SAPPIAMO CHE

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ T.C.

(1) $\forall x \in \Omega - \{x_0\} \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$

ALLORA, SICCOME $A \subset \Omega$, SE VALE (1), A MAGGIOR RAGIONE VALE

$$\forall x \in A - \{x_0\} \quad d(x,x_0)<\delta \Rightarrow d(f(x),\ell)<\varepsilon$$

CIOÈ, VISTO CHE SU A $f = f|_A$, VALE

$$\forall x \in A - \{x_0\} \quad d(x,x_0)<\delta \Rightarrow d(f|_A(x),\ell)<\varepsilon$$

CHE È QUANTO SI VOLEVA DIMOSTRARE.

ES. 6 (ESEMPIO CATTIVO) CALCOLARE, SE ESISTE: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

SVOLGIMENTO

QUESTO ESEMPIO PUÒ TRARRE IN INGANNO: SI PUÒ PENSARE CHE FACCIA ZERO, PERCHÉ RESTRINGENDOSI AD UNA QUALSIASI RETTA PER L'ORIGINE FA ZERO. TUTTAVIA VEDREMO CHE NON ESISTE.

COMINCIAMO DALLE RESTRIZIONI ALLE RETTE.

SULL'ASSE x E SULL'ASSE y È OVVIO PERCHÉ f È IDENTICAMENTE NULLA.

SU OGNI ALTRA RETTA $y = mx$ SI HA:

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{x^3 \cdot m^2}{x^2 + m^4x^4} = \frac{x\cdot m^2}{1+m^4x^2} \xrightarrow{\text{PER } x\to 0} \frac{0\cdot m^2}{1+m^4\cdot 0} = \frac{0}{1} = 0$$

QUINDI È VERO CHE, RESTRINGENDOSI AD UNA QUALSIASI RETTA, $f(x,y)\to 0$.

TUTTAVIA SE CI SI RESTRINGE ALLA PARABOLA $x = y^2$ SI OTTIENE:

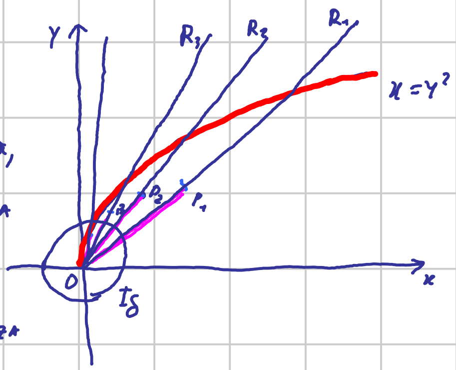
$$f(y^2,y) = \frac{y^2\cdot y^2}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{PER } y\to 0$$

QUINDI:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{NON ESISTE}$$

ALTRIMENTI DOVREBBE ESSERE UGUALE SU TUTTE LE RESTRIZIONI.

PER CAPIRE COSA STA SUCCEDENDO IMMAGINIAMO DI GUARDARE LA FUNZIONE DALL'ALTO:



IN FIGURA ABBIAMO SEGNATO IN ROSSO LA CURVA $x=y^2$ LUNGO LA QUALE LA FUNZIONE VALE $\frac{1}{2}$.

ORA, $\forall \varepsilon > 0$, PER OGNI SEMIRETTA NASCENTE DALL'ORIGINE, SI IMMAGINI DI COLORARE DI ROSA LA PARTE DI SEMIRETTA IN CUI $|f(x,y)|<\varepsilon$. SI TROVA CHE TALE SEGMENTINO ROSA DIVENTA SEMPRE PIÙ PICCOLO MAN MANO CHE LA PENDENZA

DELLA SEMIRETTA AUMENTA (PERCHÈ NON PUÒ INTERSECARE LA PARABOLA ROSSA)

IN PARTICOLARE NON C'È UNA LUNGHEZZA MINIMA $\delta>0$ DEL PEZZETTINO ROSA, CHE VADA BENE UNIFORMEMENTE IN TUTTE LE DIREZIONI, COME INVECE DOVREBBE ESSERCI, SE CI FOSSE TUTTO UN INTORNO DI RAGGIO $\delta>0$ IN CUI $|f(x,y)|<\varepsilon$

INSOMMA NON C'È ALCUNA CONTRADDIZIONE TRA IL FATTO CHE IL LIMITE NON CI SIA E IL FATTO CHE LUNGO TUTTE LE RETTE PER L'ORIGINE VENGA LO STESSO VALORE.

ES. 7 CALCOLARE SE ESISTE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)\ln(1+|xy|)}{x^2+y^2+xy}$

SVOLGIMENTO

RICORDIAMO CHE VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

DA CUI SEGUE:

$$x^2+y^2+xy \geq x^2+y^2-|xy| \geq x^2+y^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

ORA, SE CI SI RESTRINGE ALL'INSIEME $x^2+y^2\leq 1$, LA FUNZIONE È ≥ 0 E SI HA:

$$0 \leq \frac{\sin(x^2+y^2)\ln(1+|xy|)}{x^2+y^2+xy} \leq \frac{(x^2+y^2)\cdot|xy|}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 2|xy|$$

A QUESTO PUNTO, VISTO CHE $2|xy|\to 0$, ANCHE $f(x,y)\to 0$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO CHE ANDIAMO A DIMOSTRARE.

TEO. 3 (DEL CONFRONTO)

DATI $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER Ω, $\ell\in\mathbb{R}$ ED $f,g,h:\Omega\to\mathbb{R}$ TALI CHE:

(1) $\exists r>0$ TALE CHE $\forall x\in(\Omega-\{x_0\})\cap I_r(x_0)$ $\quad g(x)\leq f(x)\leq h(x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell=\lim_{x\to x_0} h(x)$

ALLORA SI HA ANCHE $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

DIM

$\forall\varepsilon>0$ VOGLIAMO TROVARE $\delta>0$ TALE CHE $\forall x\in I_\delta(x_0)\cap(\Omega-\{x_0\})$ SI HA $\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$

GRAZIE A (2) SAPPIAMO CHE $\exists\,\delta_1>0$ T.C. $\forall x\in I_{\delta_1}(x_0)\cap(\Omega-\{x_0\})$ SI HA $\ell-\varepsilon<g(x)<\ell+\varepsilon$

E CHE $\exists\,\delta_2>0$ T.C. $\forall x\in I_{\delta_2}(x_0)\cap(\Omega-x_0)$ SI HA $\ell-\varepsilon<h(x)<\ell+\varepsilon$.

QUINDI PRESO $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, $\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (\Omega - \{x_0\})$ VALGONO SIMULTANEAMENTE LE 3 CONDIZIONI:

$$\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \, , \quad \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon , \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

METTENDO INSIEME LE QUALI, SI OTTIENE:

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$$

QUINDI $\forall x \in I_\delta(x) \cap (\Omega - \{x_0\})$ SI HA $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

CIÒ SIGNIFICA CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.