AM 1 - PROVA SIMULATA DI I° ESONERO

1 SIA DATA UNA SEQUENZA DI INSIEMI $(A_n)_n$, TALI CHE $A_i \subset \mathbb{R}$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$. DIRE SE SONO VERE O FALSE LE SEGUENTI AFFERMAZIONI, MOTIVANDO LA RISPOSTA

- **a** SE UN PUNTO $x \in \mathbb{R}$ È INTERNO AD A_n, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, ALLORA x È ANCHE INTERNO A $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. VERO FALSO
- **b** SE UN PUNTO $x \in \mathbb{R}$ È INTERNO AD A_n, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, ALLORA x È ANCHE INTERNO A $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. VERO FALSO
- **c** SE PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA $A_{n+1} \subset A_n$ ALLORA $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \emptyset$. VERO FALSO
- **D** COME $\boxed{c}$ MA CON L'ULTERIORE IPOTESI CHE GLI A_n SIANO TUTTI CHIUSI. VERO FALSO
- **E** COME $\boxed{c}$ MA CON L'ULTERIORE IPOTESI CHE GLI A_n SIANO TUTTI COMPATTI. VERO FALSO

2 CONFRONTARE GLI ORDINI DI INFINITO DELLE SUCCESSIONI:

$$a_n = 2^{n^2} \qquad b_n = n^n \qquad c_n = (\ln n)^{(\ln n)^{\ln n}} \qquad d_n = \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)^{n^2}$$

3 CALCOLARE:

a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)^n$ **b** $\displaystyle\limsup_{n \to +\infty} \left(\sin\sqrt{n} + \cos\sqrt{n}\right)^n$ **e** $\displaystyle\limsup_{n \to +\infty} \left(\sin n + \cos n\right)^n$

4 CALCOLARE (EVENTUALMENTE AL VARIARE DI $a > 0$):

a $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(\sin x^2)) + \sin x^6}{\ln(\cos x)}$ **d** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^2}$ **e** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$ **b** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{x^x}}{(1 - \cos\sqrt{x})^a}$