ANALISI MATEMATICA 1 — ESERCIZI SUI PUNTI LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

(FOGLIO ESERCIZI n. 2 DEL 21 OTTOBRE 2024 - CDL MATEMATICA (UNIV. DI ROMA TOR VERGATA))

DETERMINARE TUTTI I PUNTI LIMITE DI (a_n) (COMPRESI LIMINF E LIMSUP) NEI CASI SEGUENTI:

1) $a_n = \frac{1}{n} + 4(-1)^n + \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)$

2) $a_n = e^{n^{\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)}}$

3) $a_n = \frac{1}{10}\left\lfloor 10 \sin \sqrt{n} \right\rfloor$

4) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2 \cdot n^{2+\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}}\right)^{n\sqrt{n}}$

5) $a_n = \left(\frac{n}{7} - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor\right) + \left(\frac{n}{11} - \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor\right) + \left(\frac{n}{13} - \left\lfloor \frac{n}{13} \right\rfloor\right)$

6) $a_n = \log_2 n - \lfloor \log_2 n \rfloor$

7) $a_n = (-1)^n \cdot 5 + \log_2 n - \lfloor \log_2 n \rfloor$

TROVARE LIMINF(a_n) E LIMSUP(a_n) NEI SEGUENTI CASI:

8) $a_n = \frac{(n!)^{\sin(n)}}{(n^n)^{\cos(n)}}$

9) $a_n = \left(1 - (\sin \sqrt{n})^4\right)^n$

10) SAPENDO CHE (a_n) HA 3 PUNTI LIMITE E (b_n) NE HA 5, DIRE (MOTIVANDO LA RISPOSTA) QUANTI PUNTI LIMITE PUÒ AVERE, AL MASSIMO, $(a_n + b_n)$.

MOSTRARE CHE VALGONO LE SEGUENTI RELAZIONI:

11) $\liminf(a_n) + \liminf(b_n) \leq \liminf(a_n + b_n) \leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$

12) $\limsup(-a_n) = -\liminf(a_n)$

13) TROVARE UNA SUCCESSIONE DI INSIEMI (I_n) TALE CHE $\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k\geq n} I_k\right) = \mathbb{R}$ MA $\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{k\geq n} I_k\right) = \emptyset$

[SUGGERIMENTO: NOTARE LA SOMIGLIANZA CON LIMINF E LIMSUP DI SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}$]