Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .... **A.A. 2023-2024**

Nome: .... **Scritto del 11/09/2024**

---

1. Determinare gli insiemi $A = \bigcap_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$, $B = \bigcap_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$ e $C = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$ e di ciascuno dire se è chiuso e/o aperto.

2. Sia data la successione (a_n) definita da $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

(a) Trovare $\liminf_{n \to +\infty} a_n$ e $\limsup_{n \to +\infty} a_n$ e mostrare che non ci sono altri punti limite.

(b) Fare quanto richiesto dal punto **(a)** anche per la successione $b_n = (-1)^n a_n$.

(c) Trovare (A_n) con gli stessi punti limite di (a_n) ma tale che $B_n = (-1)^n A_n$ ne ha 4.

3. Sia $f(x) = \ln(\cos x)$.

(a) Trovare $a \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}$ tali che $f(f(x)) \approx ax^n$ per $x \to 0$.

(b) Trovare $b \in \mathbf{R}$ e $m \in \mathbf{N}$ tali che $(f(f(x)) - ax^n) \approx bx^m$ per $x \to 0$.

4. Sia (a_n) la successione, dipendente dal parametro reale λ, definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \lambda + a_n + \cos a_n \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

Determinare il limite ℓ di a_n nei casi: $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$.
Negli eventuali casi in cui $a_n \to \pm\infty$ determinarne l'ordine. (facoltativo)

5. Data $f \in C^1(\mathbf{R})$ dimostrare o confutare le affermazioni che seguono.

(a) Se per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f'(x) \geq \frac{1}{1+x^2}$ allora f è strettamente crescente. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) Se per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $|f'(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ allora f è limitata. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) Se per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f'(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$ allora f è limitata. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) (facoltativa) Se per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $|f'(x)| \geq \frac{1}{1+x^2}$ allora f è o strettamente crescente o strettamente decrescente su tutto $\mathbf{R}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$