

# Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .....

A.A. 2023-2024

Nome: .....

Scritto del 26/08/2024

1. Per ogni  $n \in \mathbf{N}$  poniamo  $B_n = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos nx = 1\}$  dopodiché definiamo  $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ .  
 Determinare parte interna e frontiera di  $B_{100}$  e di  $B$ .

2. Confrontare gli ordini di infinito delle seguenti successioni:

$$a_n = 2^n \quad b_n = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad c_n = n^8 \quad d_n = \left(1 + \sqrt[n]{9}\right)^n.$$

3. Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}$ .

4. Per ogni  $n \in \mathbf{N}$  siano  $A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid (x+2)^2 - 3 = \arctan nx\}$  e  $\alpha_n = \sup A_n$ . Determinare:  
 (a) il numero di elementi di  $A_1$ ;  
 (b) il numero di elementi di  $A_{10}$ ;  
 (c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ , (facoltativo).

5. Sia  $f : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  una funzione continua tale che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2)}{f(x)} = 2$ .

(a) Mostrare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+4)}{f(x)} = 4$ .

(b) Mostrare che  $f$  ha minimo assoluto.

(c) È vero che necessariamente si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \sqrt{2}$ ? (facoltativo)