Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .... A.A. 2023-2024

Nome: .... Scritto del 08/07/2024

---

1. Dire, motivando la risposta, quali dei seguenti insiemi possono essere ottenuti come derivato di un insieme: $A = [0, +\infty)$, $B = \mathbf{Z}$, $C = \mathbf{Q}$ e $D = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$.

2. Data la successione (a_n), dove $a_n = \left(n^{\sqrt{n}} + (n!) \cdot \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \cdot \sin \frac{1}{n!}$, determinare $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n$ e $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n$. Ci sono altri punti limite oltre ad essi?

3. Sono date $f, g \in C^\infty(\mathbf{R})$. Di f sappiamo che il polinomio di Taylor di ordine 15 nell'origine è $p(x) = x^5 + x^{11}$. Di g sappiamo che quello di ordine 12 è $q(x) = x^8 + x^{12}$.
Usando solo queste informazioni, qual è il polinomio di Taylor di ordine massimo che si riesce a determinare nell'origine per la funzione prodotto $f(x)g(x)$?
Come va modificata la risposta se l'ordine di $q(x) = x^8 + x^{12}$ passa da 12 a 20?

4. Studiare la lipschitzianità e l'uniforme continuità della funzione $f(x) = \sqrt{|x \sin x|}$ sugli insiemi $A = [0, 1]$, $B = [0, \pi]$ e $C = [1, +\infty)$.

5. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R} - \{0\}$ il limite di (a_n) definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $f(x) = x + \frac{1}{x} + 1$ dopodiché, nei casi in cui il limite sia $+\infty$, stabilire con che ordine ci tende.