Università di Roma "Tor Vergata" - CdL Matematica

Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .... A.A. 2023-2024

Nome: .... Scritto del 10/06/2024

---

1. Per ogni $\delta > 0$ definiamo $A_\delta = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x = \sin(x+\delta)\}$.
Mostrare che A_1 è discreto e infinito.
Esistono valori di δ per i quali A_δ è vuoto?
E invece valori per i quali è finito?
E valori per i quali è denso?
(Giustificare ogni affermazione con una dimostrazione o con un controesempio)

2. Confrontare l'ordine di infinito delle seguenti successioni:

$$a_n = (n+3)^n \qquad b_n = n^{n+3} \qquad c_n = 10^{n \ln n} \qquad A_n = \left(e + \frac{(-1)^n e}{n}\right)^{n \ln n}$$

3. Calcolare $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{2\ln(\cos x) + \ln\left(1 + \sin^2 x + \sin^4 x\right)}{\cos x^2 - \sqrt{1 - x^4 + 2x^6}}$.

4. Dire se la funzione $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x} + \arctan \sqrt{x-1}$ ha massimo e minimo assoluti e, in caso affermativo, trovarli.

5. Studiare la lipschitzianità e l'uniforme continuità della funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ sugli insiemi $A = (0, 100]$ e $B = [1, +\infty)$.

Soluzioni

1. Vediamo com'è fatto A_1.
Gli x che soddisfano la condizione

$$\sin x = \sin(x+1)$$

sono tutti e soli quelli che soddisfano

$$\sin x = \sin x \cos 1 + \cos x \sin 1$$

cioè

$$(1 - \cos 1)\sin x = \sin 1 \cos x. \tag{1}$$

Ma siccome $1 - \cos 1 \neq 0$ e $\sin 1 \neq 0$ e inoltre $\sin x$ e $\cos x$ non possono annullarsi simultaneamente, allora (1) equivale a

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 1}{1 - \cos 1}$$

ovvero

$$\tan x = \frac{\sin 1}{1 - \cos 1}$$

che ha per soluzioni tutti e soli gli x del tipo

$$x = \arctan\left(\frac{1 - \cos 1}{\sin 1}\right) + k\pi \qquad \text{con } k \in \mathbf{Z}.$$

Quindi l'insieme A_1 è infinito (perché in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{Z}$) e discreto (perché ogni suo punto è isolato dal momento che, prendendone un intorno di raggio minore di π, questo non contiene altri punti dell'insieme).
Vediamo ora come può essere fatto A_δ per altri valori di δ.
Intanto non può mai essere vuoto. Infatti A_δ è l'insieme dei punti il cui la funzione $f(x) = \sin x - \sin(x+\delta)$ si annulla e non può mai essere vuoto perchè f cambia segno passando da x a $x+\pi$:

$$f(x+\pi) = \sin(x+\pi) - \sin(x+\delta+\pi) = -\sin(x) + \sin(x+\delta) = -f(x)$$

Quindi, o $f(x) = f(x+\pi) = 0$, quindi sia x che $x+\pi$ stanno in A_δ, o $f(x)$ e $f(x+\pi)$ sono non nulli e opposti, cosicchè per il teorema degli zeri esiste c compreso tra x e $x+\pi$ in cui $f(c) = 0$, nel qual caso è c ad appartenere ad A_δ.
In ogni caso comunque A_δ non è vuoto.
Ma allora A_δ è anche infinito, perché f è periodica e quindi, se si annulla in un punto, allora si annulla anche nel punto corrispondente di ciascuno degli altri periodi.
Infine notiamo che se $\delta = 2\pi$ allora A_δ è tutto $\mathbf{R}$ (visto che $\sin x = \sin(x+2\pi)$ per ogni x) e quindi a maggior ragione è denso.

2. Prima di confrontarle, troviamo per le nostre successioni degli asintotici equivalenti più maneggevoli.

Abbiamo:

$$a_n = (n+3)^n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n \cdot n^n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n \cdot n^n \approx e^3 \cdot n^n$$

e

$$c_n = 10^{n\ln n} = \left(e^{\ln 10}\right)^{n\ln n} = \left(e^{n\ln n}\right)^{\ln 10} = \left(n^n\right)^{\ln 10}.$$

Inoltre se n è pari si ha

$$\begin{aligned} A_n = \left(e+\frac{e}{n}\right)^{n\ln n} &= e^{n\ln n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\ln n} = \\ =& n^n \cdot e^{(\ln n)\cdot n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = n^n\cdot e^{(\ln n)\cdot n\cdot\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = n^n\cdot e^{\ln n + o(1)} \approx n^{n+1}\end{aligned}$$

mentre se n è dispari con calcoli simili si ottiene

$$A_n = \left(e-\frac{e}{n}\right)^{n\ln n} = e^{n\ln n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\ln n} = [...] = n^n\cdot e^{-\ln n+o(1)} \approx n^{n-1}.$$

A questo punto possiamo confrontarle comodamente.
Innanzitutto A_n e a_n non sono confrontabili, perché $\frac{A_n}{a_n}$ non ha limite, in quanto:

$$\frac{A_n}{a_n} \approx \begin{cases} \dfrac{n^{n+1}}{e^3\cdot n^n} = \dfrac{n}{e^3} & \text{per } n \text{ pari} \\ \dfrac{n^{n-1}}{e^3\cdot n^n} = \dfrac{1}{ne^3} & \text{per } n \text{ dispari.}\end{cases}$$

Inoltre sono entrambe $o(b_n)$ perché:

$$\frac{A_n}{b_n} \le \frac{n^{n+1}}{n^{n+3}} = \frac{1}{n^2} \to 0$$

e

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{e^3\cdot n^n}{n^{n+3}} = \frac{e^3}{n^3} \to 0$$

Infine $b_n = o(c_n)$ perché

$$\frac{b_n}{c_n} = \frac{n^{n+3}}{\left(n^n\right)^{\ln 10}} = \frac{1}{n^{-3+n(-1+\ln 10)}} \to 0$$

$\boxed{3.}$

Prima di calcolare il limite sistemiamo il numeratore.
Siccome $2\ln(\cos x) = \ln\left(\cos^2 x\right) = \ln\left(1-\sin^2 x\right)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\text{Numeratore} &= 2\ln(\cos x) + \ln\left(1+\sin^2 x+\sin^4 x\right) = \\ &= \ln\left(1-\sin^2 x\right) + \ln\left(1+\sin^2 x+\sin^4 x\right) = \\ &= \ln\left(\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\left(1+\sin^2 x+\sin^4 x\right)\right) = \\ &= \ln\left(1-\sin^6 x\right) \approx -x^6.\end{aligned}$$

Al denominatore invece si ottiene

$$\begin{aligned}\text{Denominatore} &= \cos x^2 - \sqrt{1 - x^4 + 2x^6} = \\ &= 1 - \frac{x^4}{2} + O\left(x^8\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-x^4 + 2x^6\right) + O\left(x^8\right)\right) = \\ &= -x^6 + O\left(x^8\right) \approx -x^6.\end{aligned}$$

In tal modo il nostro limite diventa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x^6}{-x^6} = 1.$$

4. Il dominio di f è $[1, +\infty)$.
Mostreremo che la funzione è strettamente crescente sul suo dominio quindi il minimo assoluto è $f(1) = \sin 1$, mentre il massimo assoluto non c'è in quanto

$$\sup_{x \geq 1} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \arctan \sqrt{x - 1} = 1 + \frac{\pi}{2}$$

ma tale valore non viene assunto da f in alcun punto x.
Per mostrare che f è strettamente crescente poniamo $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ e $h(x) = \arctan \sqrt{x - 1}$, cosicché $f(x) = g(x) + h(x)$ e basta far vedere che, separatamente, g ed h sono strettamente crescenti su $[1, +\infty)$.
Per h ciò è banalmente vero perché è composizione di funzioni strettamente crescenti.
Per g invece verifichiamo che su $[1, +\infty)$ la derivata è strettamente positiva.
Si ha

$$g'(x) = 1 \cdot \sin \frac{1}{x} + x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

e siccome quando x varia su $[1, +\infty)$, $\frac{1}{x}$ varia su $(0, 1]$, basta porre $t = \frac{1}{x}$ e mostrare che se $0 < t \leq 1$ allora $\sin t - t \cos t > 0$.
Ma siccome per $0 < t \leq 1$, si ha $\sin t > 0$ e $\cos t > 0$, mostrare che $\sin t - t \cos t > 0$ equivale a mostrare che $\frac{\sin t}{\cos t} > t$, cioè che $\tan t > t$, cosa che per $0 < t \leq 1$ è già nota.

5. Poiché f è di classe C^1, è Lipschitziana se e solo se f' è limitata.
La sua derivata è:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\cos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x}\right)$$

Si vede subito che $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ e di conseguenza f non può essere Lipschitziana su $A = (0, 100]$.
Invece su $B = [1, +\infty)$ f' è limitata perché:

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \cdot \left|\cos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \cdot \left(|\cos x| + \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{\sin x}{x}\right|\right) \leq 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Quindi, su B, f è Lipschitziana e perciò anche uniformemente continua.

Rimane da verificare se sia uniformemente continua su A.
A tale scopo osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

e quindi possiamo estendere con continuità f anche per $x = 0$ nel modo seguente

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in (0, 100] \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Ovviamente F è continua su $[0, 100]$, che è compatto, quindi è uniformemente continua, per il Teorema di Heine-Cantor. Quindi è uniformemente continua anche la sua restrizione a $(0, 100]$, che è proprio f.
Riassumendo: su $(0, 100]$ f è uniformemente continua ma non lipschitziana, mentre su $[1, +\infty)$ è anche lipschitziana.