

Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome:

A.A. 2023-2024

Nome:

Scritto del 22/01/2024

1. Si consideri il sottoinsieme di \mathbf{R} definito da $A = (-\infty, -1] \cup (\mathbf{Q} \cap (-1, 0]) \cup \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$.

- (a) Determinare \overline{A} , ∂A e $\mathcal{D}A$.
- (b) Determinare $\overline{\overline{A}}$, $\partial\partial A$ e $\mathcal{D}\mathcal{D}A$.
- (c) Dire, motivando la risposta, se esiste $B \subset \mathbf{R}$ tale che $\mathcal{D}\mathcal{D}B = \mathcal{D}B$.

2. Date le successioni $a_n = \sqrt[100]{\ln(1+e^n)}$ e $b_n = e^{1+\ln(1+\ln^{100} n)}$

- (a) confrontarne l'ordine di infinito;
- (b) trovare c_n con ordine di infinito strettamente compreso tra quelli di a_n e b_n ;
- (c) trovare α_n con ordine di infinito che, per ogni $\alpha > 0$, sia strettamente compreso tra quelli di a_n^α e b_n^α .

3. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x+2x^2) + \ln(1-2x+2x^2) - \cos(x \cdot \sqrt{6}) + \sqrt{1-6x^2+4x^4}}{6x^2 - \sin 6x^2}$

4. Sia $f(x) = (x^8 - 1)^4$.

- (a) Quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{2024+x}{2024}$?
- (b) Per quali $m \in \mathbf{R}$ esiste $q \in \mathbf{R}$ tale che l'equazione $f(x) = mx + q$ ha almeno 3 soluzioni?

5. Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile 2 volte e tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si abbia $|f''(x)| \leq 1$. Dire qual è il massimo valore che può assumere $f(1)$ in ciascuno dei seguenti casi:

- (a) se $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$;
- (b) se $f(0) = f(2) = 0$;
- (c) se $f(0) = f(2) = 0$ e $f'(0) = f'(2) = 0$.