Analisi Matematica (II modulo)- Exe. 11

Titolo nota 15/08/2014

20 Maggio 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SOLUZIONI

(PER I PIÙ SEMPLICI SI METTERANNO SOLO LE RISPOSTE, SENZA SVOLGERLI)

1 $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \le 1\}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO NO — LIMITATO SI

$\mathring{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$

$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$

$\overline{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$

$D\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$

---

2 $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < |x|+|y| \le 1\}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO NO — LIMITATO SI

$\mathring{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < |x|+|y| < 1\}$

$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| = 1\} \cup \{(0,0)\}$

$\overline{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \le 1\}$

$D\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \le 1\}$

---

3 $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < |x+y| \le 1\}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO NO — LIMITATO NO

$\mathring{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < |x+y| < 1\}$

$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y = 0 \text{ o } x+y = 1 \text{ o } x+y = -1\}$

$\overline{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x+y| \le 1\}$

$D\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x+y| \le 1\}$

$\boxed{4}$ $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0,\ x=\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}-\{0\} \right\}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO SI — LIMITATO SI

$\mathring{\Omega} = \emptyset$

$\partial\Omega = \Omega \cup \{(0,0)\}$

$\overline{\Omega} = \Omega \cup \{(0,0)\}$

$D\Omega = \{(0,0)\}$

$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\Omega = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ OPPURE $\Omega = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$

(STESSE RISPOSTE)

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO SI — DISCRETO NO — LIMITATO NO

$\mathring{\Omega} = \emptyset$

$\partial\Omega = \mathbb{R}^2$

$\overline{\Omega} = \mathbb{R}^2$

$D\Omega = \mathbb{R}^2$

$\boxed{7}$ $\Omega = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO NO — LIMITATO NO

$\mathring{\Omega} = \emptyset$

$\partial\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

$\overline{\Omega} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

$D\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

$\boxed{8}$ $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0 \right\}$

CHIUSO NO — APERTO SI — COMPATTO NO

DENSO SI — DISCRETO NO — LIMITATO NO

$\mathring{\Omega} = \Omega$

$\partial\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \right\}$

$\overline{\Omega} = \mathbb{R}^2$

$D\Omega = \mathbb{R}^2$

---

9 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\in\mathbb{Q}\}$

CHIUSO **NO** APERTO **NO** COMPATTO **NO**

DENSO **SI** DISCRETO **NO** LIMITATO **NO**

$\mathring{\Omega}=\emptyset$

$\partial\Omega=\mathbb{R}^2$

$\overline{\Omega}=\mathbb{R}^2$

$D\Omega=\mathbb{R}^2$

Ω È L'UNIONE DI TUTTE LE RETTE DEL TIPO $x+y=q$, CON $q\in\mathbb{Q}$

---

10 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}-\{0\}\}$

CHIUSO **NO** APERTO **NO** COMPATTO **NO**

DENSO **NO** DISCRETO **NO** LIMITATO **NO**

$\mathring{\Omega}=\emptyset$

$\partial\Omega=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$

$\overline{\Omega}=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$

$D\Omega=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$

---

11 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{m}{n},\ m,n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0\}$

CHIUSO **NO** APERTO **NO** COMPATTO **NO**

DENSO **NO** DISCRETO **SI** LIMITATO **NO**

$\mathring{\Omega}=\emptyset$

$\partial\Omega=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$

$\overline{\Omega}=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$

$D\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$

OSS. 1 OGNI RETTANGOLO DEL TIPO $(a,b)\times(c,d)$ CON $0<a<b$ CONTIENE SOLO UN NUMERO FINITO DI PUNTI DI Ω. QUINDI I PUNTI DEL TIPO (x,y), CON $x>0$, O SONO PUNTI ISOLATI DI Ω, O SONO PUNTI ESTERNI. ANALOGAMENTE SI RAGIONA CON I PUNTI DI TIPO (x,y) CON $x<0$.

OSS. 2 TUTTI I PUNTI DEL TIPO $(0,y)$ SONO DI ACCUMULAZIONE PER Ω, INFATTI $\forall\rho>0$ MOSTRIAMO CHE C'È UN PUNTO DI Ω CHE DISTA DA $(0,y)$ MENO DI ρ. INFATTI, PRESO $n\in\mathbb{N}$ TALE CHE $\frac{1}{n}<\frac{\rho}{2}$ BASTA PRENDERE $m\in\mathbb{Z}$ TALE CHE $\frac{m}{n}<y<\frac{m+1}{n}$ COSICCHÉ $d(y,\frac{m}{n})<\frac{1}{n}$

QUINDI $\left(\frac{1}{n},\frac{m}{n}\right)\in\Omega$ E SI HA:

$$d\left((0,y),\left(\tfrac{1}{n},\tfrac{m}{n}\right)\right)\le d\left((0,y),\left(0,\tfrac{m}{n}\right)\right)+d\left(\left(0,\tfrac{m}{n}\right),\left(\tfrac{1}{n},\tfrac{m}{n}\right)\right)\le\frac{1}{n}+\frac{1}{n}<\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2}=\rho$$

---

12 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z\le 1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$

CHIUSO **NO** APERTO **NO** COMPATTO **NO**

DENSO **NO** DISCRETO **NO** LIMITATO **SI**

$\mathring{\Omega}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z<1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$

$\overline{\Omega}=D\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$

$\partial\Omega=\overline{\Omega}-\mathring{\Omega}$

---

13 $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2+y^2+z^2 \le 2\}$

CHIUSO NO · APERTO NO · COMPATTO NO · DENSO NO · DISCRETO NO · LIMITATO SI

$$\mathring{\Omega} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2+y^2+z^2 < 2\}$$

$$\partial\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \ \text{ OPPURE } \ x^2+y^2+z^2=2\}$$

$$\overline{\Omega} = D\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$$

---

14 $\Omega = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

CHIUSO NO · APERTO NO · COMPATTO NO · DENSO NO · DISCRETO NO · LIMITATO NO

$$\mathring{\Omega} = \emptyset$$

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} = D\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$$

---

15 $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{1}{2^n}, \ y = \frac{m}{2^n}, \ z = \frac{k}{2^n}, \ \text{CON } n,m,k \in \mathbb{N}\}$

CHIUSO NO · APERTO NO · COMPATTO NO · DENSO NO · DISCRETO SI · LIMITATO NO

$$\mathring{\Omega} = \emptyset$$

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} = \Omega \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0, \ y \ge 0, \ z \ge 0\}$$

$$D\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0, \ y \ge 0, \ z \ge 0\}$$

RIASSUMENDO:

I PUNTI $(0,y,z)$ CON $y \ge 0$ E $z \ge 0$ SONO TUTTI DI ACCUMULAZIONE GRAZIE ALL' OSS. 3

TUTTI GLI ALTRI PUNTI, O SONO ESTERNI, O SONO PUNTI ISOLATI DI Ω (E QUINDI DI $\partial\Omega$) GRAZIE A OSS. 1 E OSS. 2

OSS. 1 $\Omega \subset$ PRIMO OTTANTE QUINDI TUTTI GLI (x,y,z) TALI CHE ALMENO UNA COORDINATA È STRETTAMENTE NEGATIVA SONO ESTERNI.

OSS. 2 TUTTI GLI INSIEMI DEL TIPO $(a,b) \times (c,d) \times (\alpha,\beta)$ CON $0 < a < b$ CONTENGONO AL PIÙ UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI DI Ω. CIÒ DIMOSTRA CHE OGNI $(x,y,z) \in \Omega$ È ISOLATO. DIMOSTRA ANCHE CHE OGNI $(x,y,z) \notin \Omega$, CON $x>0$, È ESTERNO A Ω.

OSS. 3 INVECE I PUNTI DEL TIPO $(0,y,z)$, CON $y \ge 0$ E $z \ge 0$ SONO TUTTI DI ACCUMULAZIONE PER Ω. INFATTI $\forall \rho > 0$ PRENDIAMO $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ IN MODO CHE:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\rho}{3}$$

DOPODICHÉ PRENDIAMO $m, k \in \mathbb{N}$ IN MODO CHE

$$\frac{m}{2^n} \le y < \frac{m+1}{2^n} \quad \text{E} \quad \frac{k}{2^n} \le z < \frac{k+1}{2^n}$$

CON TALI SCELTE DI n,m,k SI HA:

$$d\left((0,y,z), \left(\frac{1}{2^n}, \frac{m}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right) \le \sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{3}\,\frac{1}{2^n} < \sqrt{3}\cdot\frac{\rho}{3} < \rho$$

QUINDI $\forall \rho > 0$ ESISTE UN PUNTO DI Ω CHE DISTA DA $(0,y,z)$ MENO DI ρ. CIÒ SIGNIFICA CHE $(0,y,z)$ È DI ACCUMULAZIONE.

16 TROVARE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ TALE CHE, OPERANDO RIPETUTAMENTE SU DI ESSO CON GLI OPERATORI CHIUSURA, PARTE INTERNA E COMPLEMENTARE, SI POSSANO OTTENERE 14 INSIEMI DIVERSI (CONTANDO ANCHE Ω).

SVOLGIMENTO

BASTA PRENDERE:

$$\Omega = \left([0,1) \times \mathbb{Q}\right) \cup \left(\left([1,2] \cup \{3\} \cup [4,5) \cup (5,6]\right) \times \mathbb{R}\right)$$

SI HA:

$$\mathring{\Omega} = \left((1,2) \cup (4,5) \cup (5,6)\right) \times \mathbb{R}$$

$$\overline{\mathring{\Omega}} = \left([1,2] \cup [4,6]\right) \times \mathbb{R}$$

$$\mathring{\overline{\mathring{\Omega}}} = \left((1,2) \cup (4,6)\right) \times \mathbb{R}$$

INOLTRE:

$$\overline{\Omega} = \left([0,2] \cup \{3\} \cup [4,6]\right) \times \mathbb{R}$$

$$\mathring{\overline{\Omega}} = \left((0,2) \cup (4,6)\right) \times \mathbb{R}$$

$$\overline{\mathring{\overline{\Omega}}} = \left([0,2] \cup [4,6]\right) \times \mathbb{R}$$

QUESTI 7 INSIEMI SONO TUTTI DISTINTI, COME PURE I LORO 7 COMPLEMENTARI.

IN TUTTO ABBIAMO OTTENUTO 14 INSIEMI, TUTTI DIVERSI.

---

17 DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE UN INSIEME DISCRETO PUÒ AVERE PUNTI DI ACCUMULAZIONE.

SVOLGIMENTO

LA RISPOSTA (MOLTO SEMPLICE) È SI: BASTA PRENDERE COME ESEMPIO L'INSIEME Ω DEL PROB. 4, O DEL PROB. 11, O DEL PROB. 15

---

18 DIRE SE NELLA DISUGUAGLIANZA $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$ (CON $x \in \mathbb{R}^n$) LE COSTANTI SONO OTTIMALI.
OVVERO DIRE SE ESISTONO (OPPURE NO) $C_1 > 1$ E $C_2 < \sqrt{n}$ TALI CHE $\forall x \in \mathbb{R}^n$ VALGA $C_1 \cdot \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C_2 \cdot \|x\|_2$.

SVOLGIMENTO

LE COSTANTI 1 E $\sqrt{n}$ SONO OTTIMALI, CIOÈ NON ESISTONO $C_1 > 1$ E $C_2 < \sqrt{n}$ CHE RENDANO VERA LA DISUGUAGLIANZA PER OGNI $x \in \mathbb{R}^n$.

INFATTI SE PRENDO $x=(1,0,0,\dots,0)=e_1$ SI HA $\|x\|_2=\|x\|_1=1$, QUINDI SE $C_1>1$ NON VALE $C_1\cdot\|x\|_2\leq\|x\|_1$. QUINDI $C_1=1$ È LA COSTANTE OTTIMALE.

INOLTRE SE PRENDO $x=(1,1,\dots,1)$ SI HA $\|x\|_2=\sqrt{n}$ E $\|x\|_1=n$ E QUINDI $\|x\|_1=\sqrt{n}\cdot\|x\|_2$. DI CONSEGUENZA, SE $C_2<\sqrt{n}$, NON PUÒ VALERE $\|x\|_1\leq C_2\|x\|_2$.

QUINDI $C_2=\sqrt{n}$ È LA COSTANTE OTTIMALE.

---

19 TROVARE TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^2$ CHE SONO SIA CHIUSI CHE APERTI (MOTIVARE LA RISPOSTA).

SVOLGIMENTO

È IMMEDIATO VERIFICARE CHE $\mathbb{R}^2$ È SIA APERTO (PERCHÉ OGNI SUO PUNTO È INTERNO) CHE CHIUSO (VISTO CHE, ESSENDO $\partial\mathbb{R}^2=\emptyset$, SI HA $\partial\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^2$).

QUINDI ANCHE IL SUO COMPLEMENTARE, CIOÈ $\emptyset$, È SIA CHIUSO CHE APERTO.

OLTRE A QUESTI 2 NON CE NE SONO ALTRI.

INFATTI SE PER ASSURDO CI FOSSE UN ALTRO Ω_1 SIA CHIUSO CHE APERTO ALLORA ANCHE $\Omega_2=\Omega^c$ SAREBBE APERTO E DUNQUE $\mathbb{R}^2$ SAREBBE NON CONNESSO, VISTO CHE Ω_1 E Ω_2 SAREBBERO 2 APERTI NON VUOTI E DISGIUNTI TALI CHE $\Omega_1\cup\Omega_2=\mathbb{R}^2$. MA $\mathbb{R}^2$ NON PUÒ ESSERE NON CONNESSO, VISTO CHE È CONVESSO E QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, CONNESSO PER SPEZZATE.

---

20 SIANO $u,v,w\in\mathbb{R}^2$ I PUNTI $u=(0,1)$ $v=(1,0)$ E $w=(3,\sqrt{3})$. TROVARE $\mathring{\Omega}$, $\partial\Omega$ E $D\Omega$ DELL'INSIEME:

$$\Omega=\{\alpha u+\beta v+\gamma w \mid \alpha,\beta\in\mathbb{Z},\ \gamma\in\mathbb{Q}\}$$

SVOLGIMENTO

MOSTREREMO CHE Ω E Ω^c SONO ENTRAMBI DENSI IN $\mathbb{R}^2$, COSICCHÉ $\mathring{\Omega}=\emptyset$, $\partial\Omega=D\Omega=\mathbb{R}^2$.

LA DENSITÀ DI Ω^c È IMMEDIATA CONSEGUENZA DEL FATTO CHE Ω È NUMERABILE; QUALSIASI INTORNO IO PRENDA HA CARDINALITÀ DEL CONTINUO, QUINDI NON PUÒ ESSERE CONTENUTO IN Ω, CHE È NUMERABILE, QUINDI DEVE SEMPRE INTERSECARE Ω^c.

LA DENSITÀ DI Ω È PIÙ COMPLICATA E PASSA ATTRAVERSO DIVERSE OSSERVAZIONI.

OSS.1 $(x,y\in\Omega$ E $n,m\in\mathbb{Z})\Rightarrow nx+my\in\Omega$.

INFATTI $x_1,x_2\in\Omega\Rightarrow x_1=\alpha_1u+\beta_1v+\gamma_1w$ E $x_2=\alpha_2u+\beta_2v+\gamma_2w$ CON $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{Z}$ E $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{Q}$. MA ALLORA:

$$n x_1 + m x_2 = n(\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w) + m(\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w) =$$

$$= (n\alpha_1 + m\alpha_2) u + (n\beta_1 + m\beta_2) v + (n\gamma_1 + m\gamma_2) w$$

DOVE $n\alpha_1 + m\alpha_2 \in \mathbb{Z}$, $n\beta_1 + m\beta_2 \in \mathbb{Z}$ E $n\gamma_1 + m\gamma_2 \in \mathbb{Q}$.

QUINDI $n x_1 + m x_2 \in \Omega$.

$\boxed{\text{OSS.2}}$ $\bar{x} = (0, \sqrt{3}) \in \Omega$

INFATTI $\bar{x} = (0, \sqrt{3}) = (3, \sqrt{3}) - 3 \cdot (1, 0) = w - 3v \in \Omega$

$\boxed{\text{OSS.3}}$ I PUNTI DEL TIPO $n\bar{x} + mu$, CON $n, m \in \mathbb{Z}$ SONO TUTTI DISTINTI

MOSTRIAMO CIOÈ CHE, SE $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}$, SI HA:

(1) $$\left(n_1 \bar{x} + m_1 u = n_2 \bar{x} + m_2 u\right) \Rightarrow \left(n_1 = n_2 \text{ E } m_1 = m_2\right)$$

INFATTI:

(2) $$\left(n_1 \bar{x} + m_1 u = n_2 \bar{x} + m_2 u\right) \Leftrightarrow \left((n_1 - n_2)\bar{x} = (m_2 - m_1) u\right)$$

MA RICORDANDO CHE $u = (0,1)$ E $\bar{x} = (0, \sqrt{3})$ LA **(2)** DIVENTA.

(3) $$\left(n_1 \bar{x} + m_1 u = n_2 \bar{x} + m_2 u\right) \Leftrightarrow \left((0, (n_1 - n_2)\sqrt{3}) = (0, m_2 - m_1)\right) \Leftrightarrow \left((n_1 - n_2)\sqrt{3} = m_2 - m_1\right)$$

MA, SICCOME $\sqrt{3}$ È IRRAZIONALE, L'UNICO MODO PERCHÉ VALGA $(n_1 - n_2)\sqrt{3} = m_2 - m_1$ È CHE SIA $n_1 - n_2 = 0$ E $m_2 - m_1 = 0$, CIOÈ CHE SIA

$$n_1 = n_2 \quad \text{E} \quad m_1 = m_2$$

QUINDI ABBIAMO DIMOSTRATO **(1)**.

$\boxed{\text{OSS.4}}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists^{\text{no}} \ n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ TALI CHE $d(n\bar{x} + mu, (0,0)) < \varepsilon$. CIOÈ $(0,0)$ È PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER L'INSIEME DI TUTTE LE COMBINAZIONI A COEFFICIENTI INTERI DI $\bar{x}$ E u.

PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ PRENDIAMO $m_n = -\lfloor n\sqrt{3} \rfloor$, COSICCHÉ:

(4) $$x_n = n\bar{x} + m_n u = \left(0, n\sqrt{3} - \lfloor n\sqrt{3} \rfloor\right)$$

SI NOTI CHE $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA $0 < n\sqrt{3} - \lfloor n\sqrt{3} \rfloor < 1$. INOLTRE, GRAZIE ALL' $\boxed{\text{OSS.3}}$, AL VARIARE DI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ TALI VALORI SONO TUTTI DISTINTI, QUINDI, GRAZIE AL TEOREMA DI BOLZANO WEIERSTRASS, HANNO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE. DI CONSEGUENZA, $\forall \varepsilon > 0$, ESISTERANNO $n_1, n_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$ TALI CHE $\left|\left(n_1\sqrt{3} - \lfloor n_1\sqrt{3} \rfloor\right) - \left(n_2\sqrt{3} - \lfloor n_2\sqrt{3} \rfloor\right)\right| < \varepsilon$.

QUINDI PRESO $n = n_1 - n_2$ E $m = -\lfloor n_1\sqrt{3} \rfloor + \lfloor n_2\sqrt{3} \rfloor$ SI HA:

$$d\left(n\bar{x} + m u, (0,0)\right) = \left|(n_1 - n_2)\sqrt{3} - \lfloor n_1\sqrt{3} \rfloor + \lfloor n_2\sqrt{3} \rfloor\right| < \varepsilon$$

QUESTO DIMOSTRA L'$\boxed{\text{OSS. 4}}$.

$\boxed{\text{OSS. 5}}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists^{\text{ne}}$ $n, m \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $d\left(n\bar{x} + m u, (0,y)\right) < \varepsilon$

PRENDIAMO $n_1, m_1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ TALI CHE, DETTO $x_1 = n_1\bar{x} + m_1 u$, SI ABBIA $d(x_1, (0,0)) < \varepsilon$ (POSSIAMO FARLO GRAZIE ALL'$\boxed{\text{OSS. 4}}$). ORA, SICCOME $0 < n_1\sqrt{3} + m_1 < \varepsilon$, SE PRENDO $n \in \mathbb{Z}$ TALE CHE

$$n\left(n_1\sqrt{3} + m_1\right) \leq y \leq (n+1)\left(n_1\sqrt{3} + m_1\right)$$

AVRÒ CHE:

$$\left|n\left(n_1\sqrt{3} + m_1\right) - y\right| < \varepsilon$$

E QUINDI, POSTO $\tilde{x} = n n_1 \bar{x} + n m_1 u$, SI HA:

$$d\left(\tilde{x}, (0,y)\right) = \left|n(n_1\sqrt{3} + m_1) - y\right| < \varepsilon$$

QUESTO DIMOSTRA L'$\boxed{\text{OSS. 5}}$.

$\boxed{\text{OSS. 6}}$ (CONCLUSIONE)

SICCOME $\{u, w\}$ È UNA BASE PER $\mathbb{R}^2$, OGNI $x \in \mathbb{R}^2$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME

$$x = \alpha u + \beta w \quad \text{CON } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\forall \varepsilon > 0$ POSSO ORA PRENDERE $\gamma \in \mathbb{Q}$ IN MODO CHE $d(\gamma w, \beta w) < \frac{\varepsilon}{2}$

INOLTRE, GRAZIE ALL'$\boxed{\text{OSS. 5}}$ POSSO PRENDERE $n, m \in \mathbb{Z}$ IN MODO CHE $d\left(n\bar{x} + m u, \alpha u\right) < \frac{\varepsilon}{2}$

DI CONSEGUENZA $n\bar{x} + m u + \gamma w \in \Omega$ E SI HA

$$d\left(n\bar{x} + m u + \gamma w, \alpha u + \beta w\right) = \left\| n\bar{x} + m u + \gamma w - (\alpha u + \beta w)\right\|$$

$$\leq \left\| n\bar{x} + m u - \alpha u\right\| + \left\|\gamma w - \beta w\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

CIÒ DIMOSTRA CHE Ω È DENSO.