Stage Urbi et Orbi - Lez. 6

Titolo nota

11 gennaio 2019 (15.00-18.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

LA TECNICA DI PASSARE AL QUOZIENTE

PROBLEMA Ø IN QUANTI MODI DIVERSI 4 PERSONE POSSONO SEDERSI AD UN TAVOLO QUADRATO.

OSSERVAZIONE 1 LA FORMULAZIONE DEL PROBLEMA Ø NON È COMPLETA, PERCHÉ NON È BEN CHIARO COSA SIGNIFICA CHE 2 MODI DI SEDERSI SONO DIVERSI. SI POTREBBE INFATTI INTERPRETARLO IN (ALMENO) 3 MODI:

I I POSTI SONO NUMERATI, QUINDI 2 MODI DI SEDERSI SONO DIVERSI SE ALMENO UNO DEI COMMENSALI SIEDE A UN POSTO CON NUMERO DIVERSO.

II I POSTI NON SONO NUMERATI E DUE MODI DI SEDERSI VANNO CONSIDERATI UGUALI SE CIASCUN COMMENSALE HA ALLA SUA DESTRA E ALLA SUA SINISTRA LE STESSE PERSONE.

III I POSTI NON SONO NUMERATI E DUE MODI DI SEDERSI VANNO CONSIDERATI UGUALI SE CIASCUN COMMENSALE È VICINO ALLE STESSE PERSONE, INDIPENDENTEMENTE DA CHI GLI STA A DESTRA E CHI A SINISTRA.

I TRE MODI CORRISPONDENTI DI INTENDERE IL PROBLEMA Ø VERRANNO INDICATI, RISPETTIVAMENTE, CON PROB. Ø.I, PROB. Ø.II E PROB. Ø.III.

SOLUZIONE DI PROB. Ø.I SE I POSTI SONO NUMERATI IL PROBLEMA È SEMPLICISSIMO: LE PERMUTAZIONI DI 4 OGGETTI DIVERSI TRA 4 POSIZIONI, CIOÈ $4!$, CIOÈ 24.

SOLUZIONE DI PROB. Ø.II

IN QUESTO CASO I MODI DIVERSI SARANNO MOLTI DI MENO. AD ESEMPIO I DUE MODI IN FIGURA 1, PUR ESSENDO DIVERSI SE SI CONSIDERANO I POSTI NUMERATI, NEL NOSTRO CASO SONO UGUALI PERCHÈ OGNUNO DEI 4 COMMENSALI (A, B, C, D) HA LE STESSE PERSONE ALLA PROPRIA DESTRA E ALLA PROPRIA SINISTRA.

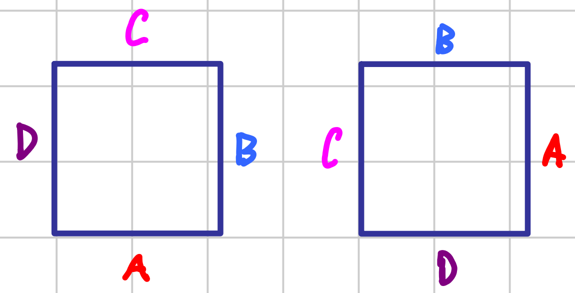


FIGURA 1

SI NOTI CHE LE DUE CONFIGURAZIONI SI OTTENGONO L'UNA DALL'ALTRA CON UNA ROTAZIONE DI 90°. QUESTO FATTO È GENERALE, CIOÈ DATE DUE CONFIGURAZIONI DI POSTI P_1 E P_2 È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE

(α) ESISTE UNA ROTAZIONE CHE SOVRAPPONE P_1 E P_2

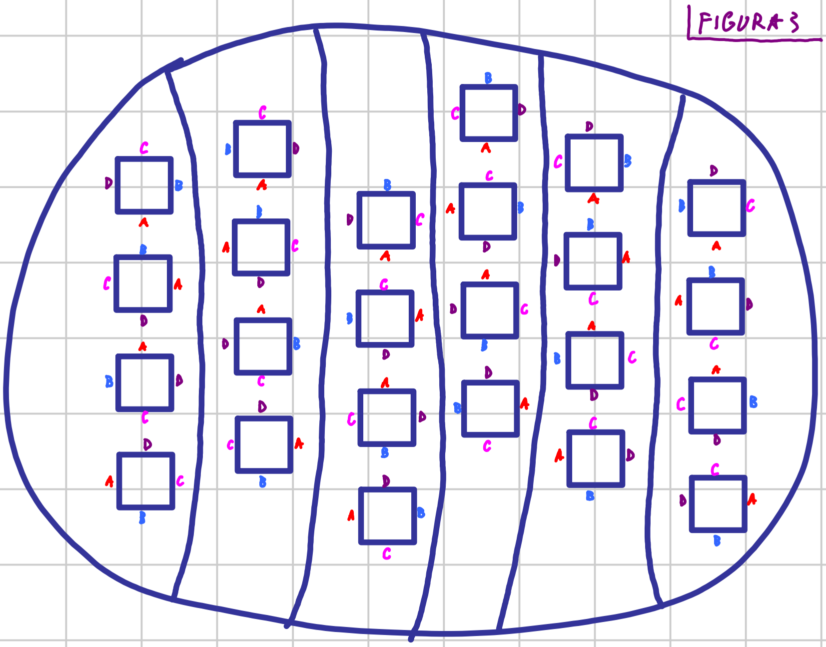
(β) OGNI COMMENSALE HA ALLA SUA DESTRA E ALLA SUA SINISTRA LE STESSE PERSONE SIA IN P_1 CHE IN P_2

IL FATTO CHE SE VALE (α) VALE ANCHE (β) È OVVIO.
PER CONVINCERSI CHE VALE ANCHE IL VICEVERSA BASTA OSSERVARE CHE SE VALE (β), UNA VOLTA RUOTATA P_1 IN MODO CHE LA POSIZIONE OCCUPATA DAL COMMENSALE A SIA LA STESSA CHE OCCUPA IN P_2, DEVONO NECESSARIAMENTE SOVRAPPORSI I COMMENSALI A LUI VICINI, POI I VICINI DEI VICINI, E COSÌ VIA. INSOMMA, SE VALE (β), LA ROTAZIONE CHE FA SOVRAPPORRE IL COMMENSALE A, FA SOVRAPPORRE ANCHE TUTTI GLI ALTRI, QUINDI VALE (α).

L'EQUIVALENZA TRA (α) E (β) CI GARANTISCE CHE DUE PERMUTAZIONI DIVERSE DEI COMMENSALI TRA I 4 POSTI CORRISPONDONO ALLO STESSO MODO DI SEDERSI SE E SOLO SE SI OTTENGONO L'UNA DALL'ALTRA CON UNA ROTAZIONE.

PRENDIAMO DUNQUE L'INSIEME DI TUTTE LE 24 PERMUTAZIONI DEI COMMENSALI A, B, C E D TRA I 4 POSTI E RAGGRUPPIAMO TRA LORO QUELLE CHE SI OTTENGONO L'UNA DALL'ALTRA CON UNA ROTAZIONE (VEDI FIGURA 3)

FIGURA 3



SI NOTI CHE, ESSENDOCI 4 MODI DI RUOTARE IL TAVOLO, OGNI RAGGRUPPAMENTO CONTIENE 4 DISPOSIZIONI DI POSTI E QUINDI I RAGGRUPPAMENTI SONO $\frac{24}{4}$ CIOÈ 6.

SI NOTI ANCHE CHE AVENDO RAGGRUPPATO INSIEME TUTTE LE DISTRIBUZIONI DI POSTI CHE CORRISPONDONO ALLO STESSO MODO DI SEDERSI, CONTARE I MODI DI SEDERSI EQUIVALE A CONTARE I RAGGRUPPAMENTI. QUINDI I MODI DI SEDERSI SONO 6.

SOLUZIONE DI PROB. Ø.III STAVOLTA I MODI DIVERSI SARANNO ANCORA MENO.

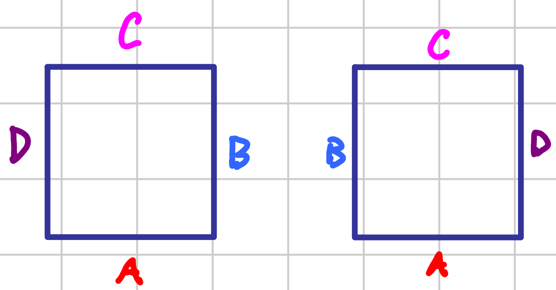


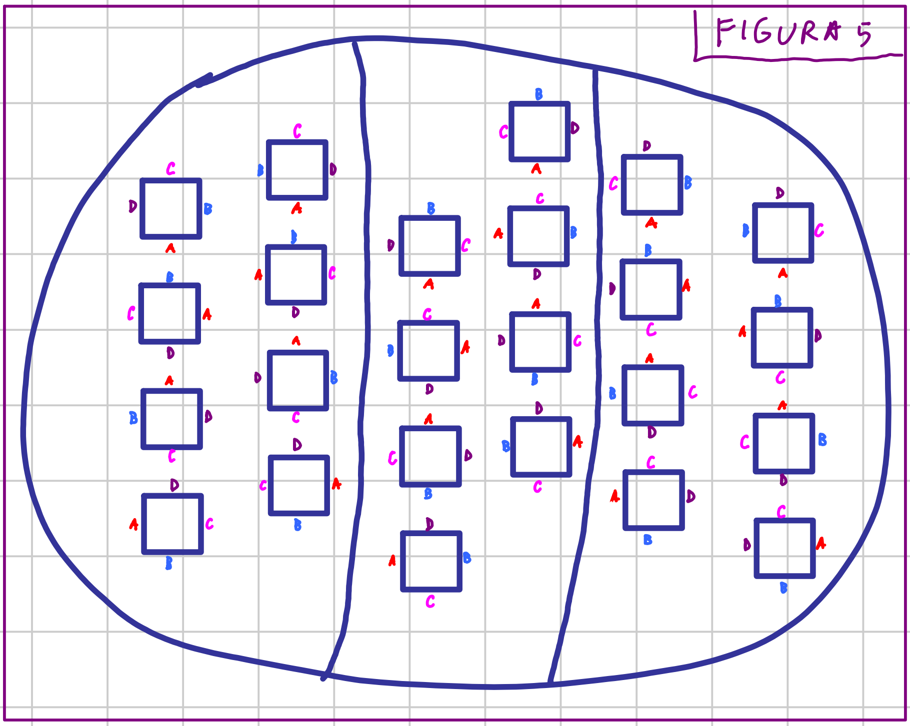
FIGURA 4

INFATTI CORRISPONDONO ALLO STESSO MODO DI SEDERSI NON SOLO LE DISTRIBUZIONI DI POSTI OTTENIBILI L'UNA DALL'ALTRA CON UNA ROTAZIONE MA ANCHE QUELLE CHE SI OTTENGONO L'UNA DALL'ALTRA CON UNA SIMMETRIA ASSIALE, COME IN FIGURA 4.

QUESTO PERCHÈ, QUANDO SI OPERA UNA SIMMETRIA ASSIALE, DESTRA E SINISTRA VENGONO SCAMBIATE MA COMMENSALI VICINI RIMANGONO VICINI.

DI CONSEGUENZA, QUANDO RAGGRUPPIAMO TRA LORO LE DISTRIBUZIONI DI POSTI CHE CORRISPONDONO ALLO STESSO "MODO DI SEDERSI", IN CIASCUN RAGGRUPPAMENTO CI SONO 8 DISTRIBUZIONI DI POSTI E QUINDI I RAGGRUPPAMENTI SONO $\frac{24}{8}$, CIOÈ 3. CIÒ SIGNIFICA CHE IL NUMERO DI MODI DIVERSI DI SEDERSI SONO 3.

TUTTO QUESTO LO SI PUÒ VEDERE SCHEMATIZZATO IN FIGURA 5:

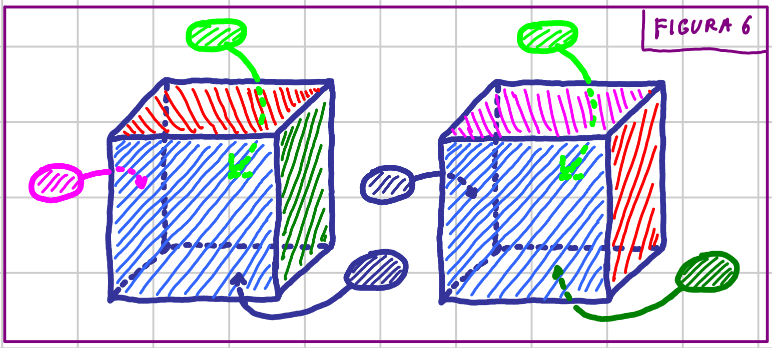


OSSERVAZIONE 2 LA TECNICA UTILIZZATA PER RISOLVERE I PROBLEMI $\boxed{Q.II}$ E $\boxed{Q.III}$ È GIÀ STATA UTILIZZATA NELLA LEZIONE 2 (PROB. 2 E 3) PER IL CALCOLO DEGLI ANAGRAMMI DI PAROLE CON LETTERE CHE SI RIPETONO.

SI CONSIGLIA DI ANDARLI A RILEGGERE PER RICONOSCERVI LO STESSO SCHEMA.

PROBLEMA 1 QUANTI DIVERSI DADI COLORATI POSSO OTTENERE, DISTRIBUENDO SEI COLORI DIVERSI, UNO SU CIASCUNA DELLE 6 FACCE DI UN CUBO? DUE CUBI VANNO CONSIDERATI UGUALI, E QUINDI CONTATI UNA SOLA VOLTA, SE C'È UNA ROTAZIONE DELLO SPAZIO CHE LI SOVRAPPONE ESATTAMENTE, IN MODO CHE I COLORI COINCIDANO.

SOLUZIONE I 6 COLORI POSSONO ESSERE DISTRIBUITI ALLE 6 FACCE DEL CUBO IN $6!$ MODI, CIOÈ IN 720 MODI. TUTTAVIA MOLTI DI QUESTI SONO EQUIVALENTI TRA LORO, AD ESEMPIO LE 2 COLORAZIONI IN FIGURA 6 SONO EQUIVALENTI PERCHÈ SI POSSONO OTTENERE L'UNA DALL'ALTRA CON UNA ROTAZIONE DI $90°$ ATTORNO ALL'ASSE DEL CUBO PERPENDICOLARE ALLA FACCIA BLU.



DOBBIAMO QUINDI IMMAGINARE DI PRENDERE L'INSIEME DI TUTTE LE 720 COLORAZIONI E DI "QUOZIENTARLO" RAGGRUPPANDO TRA LORO QUELLE CHE SI OTTENGONO L'UNA DALL'ALTRA RUOTANDO IL CUBO, COME SI PUÒ VEDERE IN FIGURA 7.

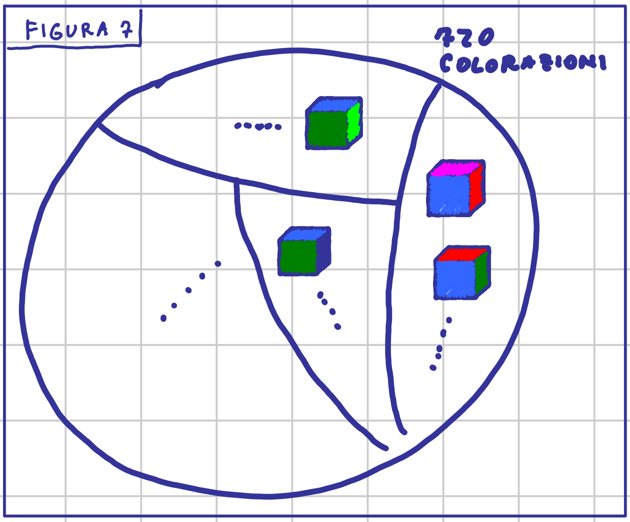


FIGURA 7

CIASCUN RAGGRUPPAMENTO CORRISPONDE AD UN MODO "ESSENZIALMENTE" DIVERSO DI COLORARE IL CUBO, QUINDI PER RISOLVERE IL NOSTRO PROBLEMA DOBBIAMO CONTARE I RAGGRUPPAMENTI. MOSTRIAMO ORA CHE CIASCUN RAGGRUPPAMENTO CONTIENE 24 COLORAZIONI.

INFATTI ESISTONO 24 MODI DI SOVRAPPORRE UN CUBO A SE STESSO: IL MOVIMENTO RIGIDO CHE MANDA IL CUBO IN SE STESSO PUÒ MANDARE IL VERTICE A IN CIASCUNO DEGLI 8 VERTICI E, PER OGNI VERTICE PUÒ FARLO IN 3 MODI DIVERSI. NELLA FIGURA 8 VENGONO ESEMPLIFICATI I 3 DIVERSI MOVIMENTI RIGIDI CHE SOVRAPPONGONO IL CUBO A SE STESSO MANDANDO IL VERTICE A NEL VERTICE F.

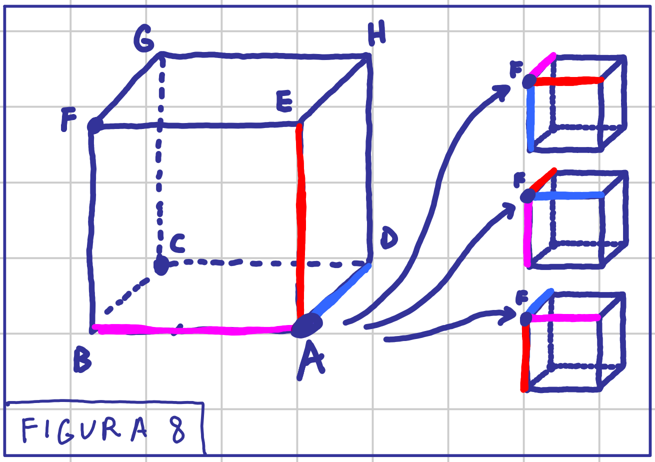


FIGURA 8

IL FATTO CHE CI SIANO 24 MODI DIVERSI DI SOVRAPPORRE IL CUBO A SE STESSO CI GARANTISCE CHE, SE PRENDIAMO UNA QUALSIASI COLORAZIONE, NE RIUSCIAMO A OTTENERE ALTRE 23 A LEI EQUIVALENTI RUOTANDO IL CUBO. DI CONSEGUENZA IN CIASCUNO DEI RAGGRUPPAMENTI DELL'INSIEME DI FIGURA 7, CI SONO 24 COLORAZIONI.

MA ALLORA I RAGGRUPPAMENTI SONO $\frac{720}{24}$, CIOÈ 30.

QUINDI 30 È LA RISPOSTA AL NOSTRO PROBLEMA PERCHÈ I RAGGRUPPAMENTI CORRISPONDONO AI MODI ESSENZIALMENTE DIVERSI DI COLORARE IL CUBO.

OSSERVAZIONE 3 NEI PROBLEMI APPENA SVOLTI È STATO SEMPLICE CONTARE QUANTI ERANO I RAGGRUPPAMENTI (IN MATEMATICA SI CHIAMANO "CLASSI DI EQUIVALENZA")

PERCHÈ TUTTI CONTENEVANO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI E QUINDI:

$$\text{NUMERO DI CLASSI DI EQUIVALENZA} = \frac{\text{NUMERO TOTALE DI ELEMENTI}}{\text{NUMERO DI ELEMENTI DI CIASCUNA CLASSE}}$$

TUTTAVIA NON È SEMPRE COSÌ. NEI PROBLEMI CHE SEGUONO SCOPRIREMO ESEMPI IN CUI LE CLASSI DI EQUIVALENZA HANNO NUMERO DI ELEMENTI DIVERSO.

PROBLEMA 2 IN QUANTI MODI POSSO SCRIVERE 100 COME SOMMA DI 3 NUMERI INTERI NON NEGATIVI? DUE MODI VANNO CONSIDERATI UGUALI E QUINDI CONTATI UNA VOLTA SOLA SE HANNO GLI STESSI ADDENDI, ANCHE SE IN ORDINE DIVERSO.

SOLUZIONE OSSERVIAMO CHE SE INVECE L'ORDINE DEGLI ADDENDI BASTASSE A RENDERE DIVERSE DUE SOMME, IL PROBLEMA SAREBBE GIÀ NOTO PERCHÈ EQUIVARREBBE A CONTARE QUANTE SONO LE TERNE (x, y, z) DI INTERI NON NEGATIVI TALI CHE

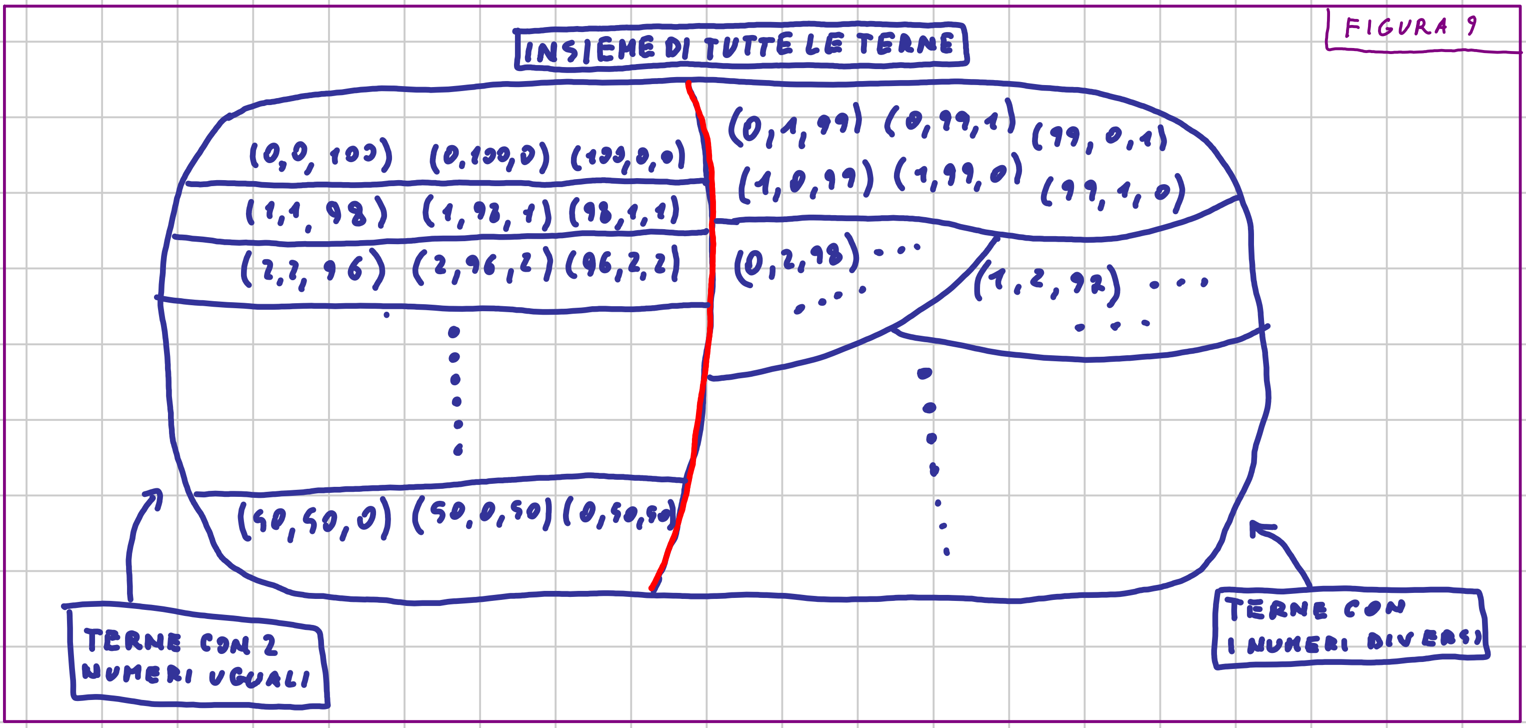
$$x + y + z = 100$$

TALE PROBLEMA È GIÀ STATO AFFRONTATO NELLA LEZIONE 2: SI TRATTA DI CONTARE IN QUANTI MODI DIVERSI POSSO DARE 100 CARAMELLE A 3 BIMBI. SAPPIAMO CHE LA RISPOSTA È $\frac{102!}{100! \cdot 2!}$ CIOÈ 5151.

TUTTAVIA, VISTO CHE L'ORDINE DEGLI ADDENDI NON CONTA, AD OGNI MODO DI SCEGLIERE 3 ADDENDI CORRISPONDONO PIÙ TERNE, CIOÈ QUELLE CHE SI OTTENGONO PERMUTANDO IN TUTTI I MODI POSSIBILI GLI ADDENDI SCELTI.

QUINDI, PER RISPONDERE AL NOSTRO QUESITO, DOBBIAMO PRENDERE L'INSIEME DELLE NOSTRE 5151 TERNE E RAGGRUPPARE TRA LORO QUELLE COSTITUITE DAGLI STESSI NUMERI: OGNI RAGGRUPPAMENTO CORRISPONDE A UN MODO DI SCEGLIERE GLI ADDENDI.

QUESTA VOLTA PERÒ I RAGGRUPPAMENTI NON CONTENGONO LO STESSO NUMERO DI TERNE: QUELLI CORRISPONDENTI A SCELTE DI 3 ADDENDI DIVERSI CONTENGONO 6 TERNE MENTRE SE 2 DEI 3 ADDENDI SONO UGUALI LE TERNE CORRISPONDENTI SONO SOLO 3. NON CI SONO TERNE CON TUTTI I NUMERI UGUALI PERCHÈ 100 NON È DIVISIBILE PER 3. LA SITUAZIONE È RAPPRESENTATA IN FIGURA 9.



DALLA FIGURA 9 SI DEDUCE ANCHE CHE I RAGGRUPPAMENTI CON 3 TERNE SONO 51, QUINDI LE TERNE CHE VANNO RAGGRUPPATE A GRUPPI DI 6 SONO TUTTE LE ALTRE, CIOÈ:

$$5151 - 51 \cdot 3 = 4998.$$

QUINDI I RAGGRUPPAMENTI DA 6 SONO:

$$\frac{4998}{6} = 833$$

QUINDI IN TUTTO I RAGGRUPPAMENTI SONO $833 + 51 = 884$.

CI SONO QUINDI 884 MODI DI SCEGLIERE 3 NUMERI INTERI NON NEGATIVI IN MODO CHE LA SOMMA SIA 100.

PROBLEMA 3 HO UN POLIGONO REGOLARE DI 11 LATI. I RAGGI CHE CONGIUNGONO I VERTICI COL CENTRO LO DIVIDONO IN 11 TRIANGOLI UGUALI, CIASCUNO DEI QUALI PUÒ ESSERE COLORATO DI BIANCO O DI NERO. IN QUANTI MODI DIVERSI PUÒ ESSERE COLORATO IL POLIGONO? DUE COLORAZIONI VANNO CONSIDERATE UGUALI E QUINDI CONTATE UNA SOLA VOLTA SE ESISTE UNA ROTAZIONE DEL POLIGONO CHE LE SOVRAPPONE.

SOLUZIONE SE DECIDESSIMO DI CONSIDERARE DISTINTE ANCHE LE COLORAZIONI CHE INVECE IL PROBLEMA CI DICE DI CONSIDERARE EQUIVALENTI, IL PROBLEMA SAREBBE PIÙ SEMPLICE: CIASCUNA DELLE 11 FETTE PUÒ ESSERE COLORATA IN 2 MODI E QUINDI I CASI POSSIBILI SONO 2^{11}.

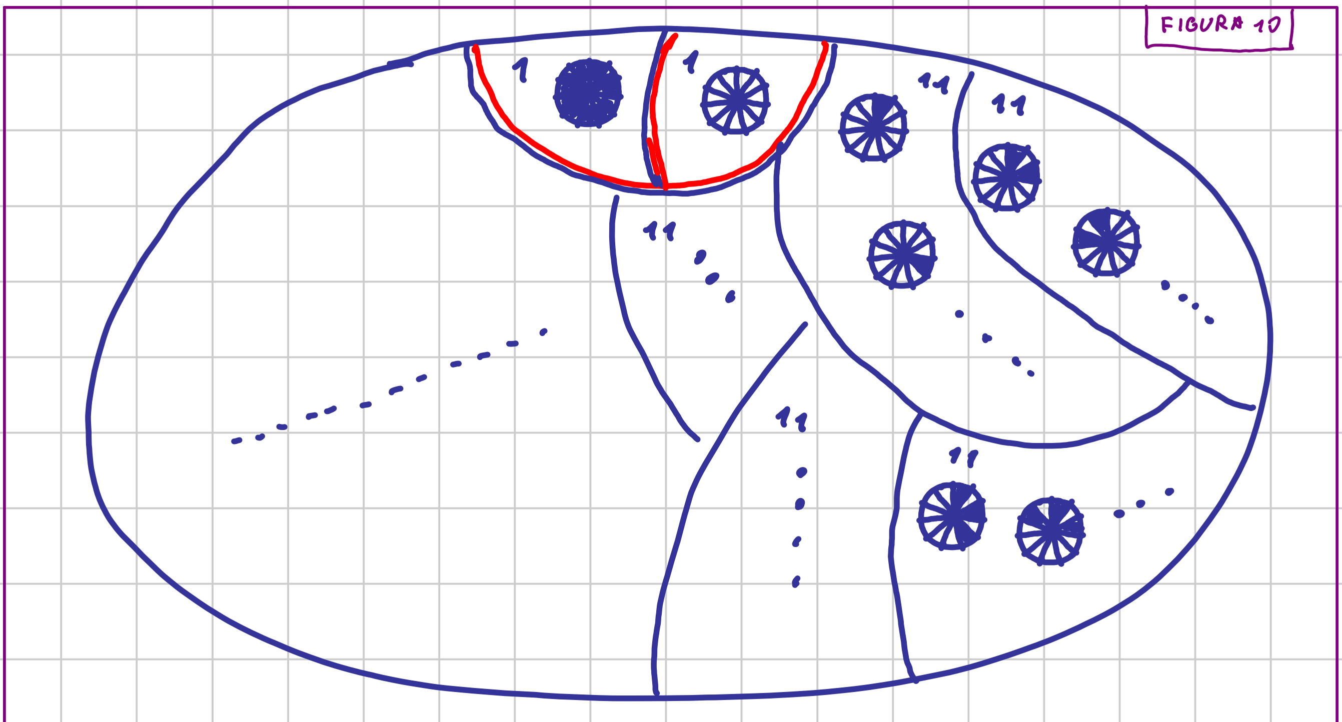
A QUEL PUNTO, COME AL SOLITO, SI TRATTA DI RAGGRUPPARE LE COLORAZIONI TRA LORO EQUIVALENTI E DI CONTARE I RAGGRUPPAMENTI: IL NUMERO DI RAGGRUPPAMENTI FORNISCE LA SOLUZIONE DEL NOSTRO PROBLEMA.

AFFERMIAMO CHE, TOLTE LE 2 COLORAZIONI BANALI (TUTTE LE FETTE BIANCHE O TUTTE LE FETTE NERE), TUTTE LE ALTRE NON SONO MAI AUTO-SOVRAPPONIBILI CON UNA ROTAZIONE. QUESTO PERCHÉ VALE LA:

PROPRIETÀ 1 DATA UNA COLORAZIONE $\mathcal{L}$ DEL POLIGONO DI 11 LATI, SE ESISTE UNA ROTAZIONE DI $\frac{k}{11}$ DI ANGOLO GIRO CHE SOVRAPPONE $\mathcal{L}$ A SE STESSA (CON $k = 1, 2, \ldots, 10$), ALLORA $\mathcal{L}$ È NECESSARIAMENTE UNA DELLE 2 COLORAZIONI BANALI.

LA **PROPRIETÀ 1**, CHE DIMOSTREREMO IN SEGUITO, CI PERMETTE DI CONCLUDERE CHE OGNI COLORAZIONE NON BANALE (CIOÈ CHE USA ENTRAMBI I COLORI) NE GENERA, PER ROTAZIONE ALTRE 10 DA LEI DIVERSE MA EQUIVALENTI.
CIÒ SIGNIFICA CHE, TOLTE LE 2 COLORAZIONI BANALI, LE RIMANENTI $2^{11}-2$ SONO RAGGRUPPATE IN RAGGRUPPAMENTI DI 11 (VEDI FIGURA 10).
QUINDI I RAGGRUPPAMENTI DA 11 SONO $\frac{2^{11}-2}{11}$, CIOÈ 186.
AGGIUNGENDO I 2 RAGGRUPPAMENTI BANALI SI OTTENGONO IN TUTTO 188 RAGGRUPPAMENTI. QUINDI LA RISPOSTA AL NOSTRO PROBLEMA È 188.

FIGURA 10



DIMOSTRAZIONE DELLA PROPRIETÀ 1

PER $k=1$ L'AFFERMAZIONE È OVVIA. INFATTI RUOTANDO DI $\frac{1}{11}$ DI ANGOLO GIRO OGNI "SPICCHIO" DEL POLIGONO SI SOVRAPPONE AL SUCCESSIVO. QUINDI DIRE CHE LA COLORAZIONE SI SOVRAPPONE A SE STESSA SIGNIFICA, IN TAL CASO, CHE OGNI "SPICCHIO" HA LO STESSO COLORE DEL SUCCESSIVO, CIOÈ TUTTI GLI "SPICCHI" HANNO LO STESSO COLORE. QUINDI $\mathcal{L}$ È UNA DELLE 2 COLORAZIONI BANALI.

INVECE PER $k=2,3,4,\dots,10$ CI SI RICONDUCE SEMPRE AL CASO $k=1$, SFRUTTANDO IL FATTO CHE 11 È PRIMO.

AD ESEMPIO FACCIAMO IL CASO $k=3$. SE LA COLORAZIONE $\mathcal{L}$ VIENE SOVRAPPOSTA A SE STESSA DA UNA ROTAZIONE DI $\frac{3}{11}$ DI GIRO, ALLORA CONTINUERÀ A SOVRAPPORSI ANCHE ITERANDO PIÙ VOLTE TALE ROTAZIONE.

MA ITERANDO 4 VOLTE UNA ROTAZIONE DI $\frac{3}{11}$ DI GIRO SI OTTIENE UNA ROTAZIONE DI $\frac{12}{11}$ DI GIRO CHE PERÒ EQUIVALE ALLA ROTAZIONE DI $\frac{1}{11}$ DI GIRO, PERCHÈ RUOTARE DI 1 GIRO È COME LASCIAR FERMO.

SI PUÒ QUINDI CONCLUDERE CHE SE LA COLORAZIONE $\mathcal{L}$ VIENE SOVRAPPOSTA A SE STESSA DA UNA ROTAZIONE DI $\frac{3}{11}$ DI GIRO, ALLORA VIENE SOVRAPPOSTA A SE STESSA ANCHE DALLA ROTAZIONE DI $\frac{1}{11}$ DI GIRO E QUINDI HA TUTTI GLI "SPICCHI" DELLO STESSO COLORE.

SE NE ABBIAMO VOGLIA POSSIAMO DIVERTIRCI A FARE CIÒ CHE ABBIAMO FATTO PER $k=3$ ANCHE PER TUTTI GLI ALTRI VALORI DI k, TUTTAVIA È POSSIBILE LIQUIDARE TUTTI I CASI IN UNA SOLA VOLTA.

INFATTI, POICHÈ 11 È PRIMO, OGNI $k=2,3,\dots,10$ È PRIMO CON P, QUINDI L'EQUAZIONE DIOFANTEA

$$k\cdot x + 11y = 1$$

AMMETTE SEMPRE SOLUZIONE (VEDI LEZIONE 3, TEO. BÈZOUT).

CIÒ SIGNIFICA CHE È SEMPRE POSSIBILE TROVARE UN INTERO POSITIVO x TALE CHE:

(1) $$x\cdot k = 1 + \text{MULTIPLO DI } 11$$

DETTO IN TERMINI DI ROTAZIONI LA (1) SIGNIFICA CHE È SEMPRE POSSIBILE TROVARE x INTERO POSITIVO TALE CHE, FACENDO x VOLTE LA ROTAZIONE DI $\frac{k}{11}$ SI OTTIENE, A MENO DI UN CERTO NUMERO DI ANGOLI GIRI, UNA ROTAZIONE DI $\frac{1}{11}$.
QUESTO CI CONSENTE DI DIRE CHE SE $\mathcal{L}$ VIENE SOVRAPPOSTA A SE STESSA DA UNA ROTAZIONE DI $\frac{k}{11}$, ALLORA VIENE SOVRAPPOSTA ANCHE DA UNA ROTAZIONE DI $\frac{1}{11}$ E QUINDI TUTTI GLI SPICCHI HANNO LO STESSO COLORE, CHE È QUANTO VOLEVAMO DIMOSTRARE.

OSSERVAZIONE 4 SE SI GENERALIZZA IL $\boxed{\text{PROBLEMA 3}}$ PRENDENDO a COLORI (ANZICHÉ 2) E p LATI, CON p PRIMO, (ANZICHÉ 11) SI OTTIENE, COME EFFETTO COLLATERALE DEL PROCEDIMENTO DI SOLUZIONE, UNA DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA DEL TEOREMA DI FERMAT.
INFATTI LA $\boxed{\text{PROPRIETÀ 1}}$ DIVENTA:

PROPRIETÀ 1bis DATA UNA COLORAZIONE $\mathcal{L}$ DEL POLIGONO DI p LATI, SE ESISTE UNA ROTAZIONE DI $\frac{k}{p}$ DI ANGOLO GIRO CHE SOVRAPPONE $\mathcal{L}$ A SE STESSA (CON $k = 1, 2, \ldots, p-1$), ALLORA $\mathcal{L}$ È NECESSARIAMENTE UNA DELLE a COLORAZIONI BANALI.

LA DIMOSTRAZIONE DELLA $\boxed{\text{PROPRIETÀ 1bis}}$ È DEL TUTTO ANALOGA A QUELLA DELLA $\boxed{\text{PROPRIETÀ 1}}$: PER $k=1$ È OVVIA, MENTRE SE $k = 2, 3, \ldots, p-1$ SI MOSTRA CHE È POSSIBILE ITERARE x VOLTE LA ROTAZIONE DI $\frac{k}{p}$ IN MODO DA OTTENERE UNA ROTAZIONE DI $\frac{1}{p}$. CIÒ È RESO POSSIBILE DAL FATTO CHE, ESSENDO p PRIMO, TUTTI I $k = 2, 3, \ldots, p-1$ SONO PRIMI CON p E QUINDI L'EQUAZIONE DIOFANTEA $kx + py = 1$ HA SEMPRE SOLUZIONE.
GRAZIE ALLA $\boxed{\text{PROPRIETÀ 1bis}}$ SI PUÒ CONCLUDERE CHE, TOLTE DALLE COMPLESSIVE a^p COLORAZIONI LE a COLORAZIONI BANALI, LE RIMANENTI $a^p - a$ COLORAZIONI SONO RAGGRUPPABILI A GRUPPI DI p. CIÒ SIGNIFICA CHE $\frac{a^p - a}{p}$ È SEMPRE INTERO.

IN PARTICOLARE, SCRIVENDO:

(2) $$\frac{a\cdot(a^{p-1}-1)}{p} = \text{INTERO}$$

OTTENIAMO CHE, ESSENDO p PRIMO, QUANDO a NON È UN MULTIPLO DI p, a È PRIMO CON p E QUINDI DA (2) SEGUE CHE $a^{p-1}-1$ È DIVISIBILE PER p.

CIÒ SIGNIFICA CHE SE p È UN NUMERO PRIMO E a NON È UN MULTIPLO DI p ALLORA:

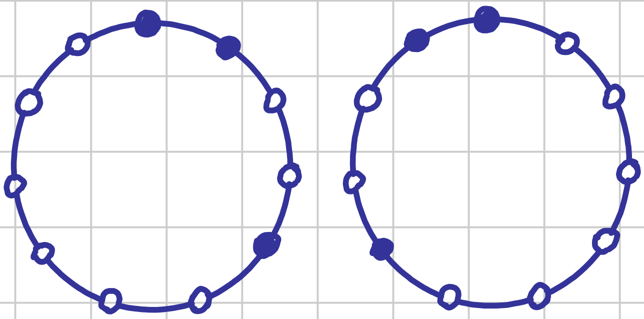
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

QUESTA AFFERMAZIONE PRENDE IL NOME DI TEOREMA DI FERMAT.

PROBLEMA 4 HO A DISPOSIZIONE 2 TIPI DI PERLINE (BIANCHE E NERE) E DEVO FARE UN BRACCIALETTO DI 11 PERLINE. IN QUANTI MODI DIVERSI POSSO FARE IL BRACCIALETTO?

SOLUZIONE IL PROBLEMA 4 È SIMILE MA NON UGUALE AL PROBLEMA 3.

FIGURA 11



CERTO, COME SUCCEDEVA COI POLIGONI, 2 BRACCIALETTI CHE VENGANO SOVRAPPOSTI DA UNA ROTAZIONE VANNO CONSIDERATI UGUALI. TUTTAVIA PUÒ SUCCEDERE CHE 2 BRACCIALETTI SIANO DA CONSIDERARE UGUALI ANCHE SE NON C'È UNA ROTAZIONE DEL PIANO CHE LI SOVRAPPONE. AD ESEMPIO I 2 BRACCIALETTI IN FIGURA 11 NON SONO SOVRAPPONIBILI PER ROTAZIONE MA SONO CHIARAMENTE LO STESSO BRACCIALETTO, VISTO CHE CIASCUNO DEI 2 SI OTTIENE DALL'ALTRO, ROVESCIANDOLO.

CIÒ SIGNIFICA CHE QUANDO RAGGRUPPIAMO TRA LORO I BRACCIALETTI EQUIVALENTI DOBBIAMO TENER CONTO NON SOLO DELLE ROTAZIONI MA ANCHE DEL FATTO DI POTERLI "GIRARE", CIOÈ SIMMETRIZZARE RISPETTO A UNO DEGLI ASSI DI SIMMETRIA DEL POLIGONO REGOLARE DI 11 LATI CHE HA LE PERLINE COME VERTICI.

ANCHE STAVOLTA, COME PER I POLIGONI, L'INSIEME DI PARTENZA DOVE RAGGRUPPIAMO HA 2^{11} ELEMENTI, VISTO CHE CIASCUNA DELLE 11 PERLINE È BIANCA O NERA. INOLTRE, ANCHE STAVOLTA, I 2 BRACCIALETTI CON PERLINE DI UN SOLO COLORE SONO RAGGRUPPATI DA SOLI. RIMANE DA CAPIRE COME RAGGRUPPARE I RIMANENTI $2^{11}-2$, CHE USANO ENTRAMBI I COLORI. PER AIUTARCI A CLASSIFICARE I CASI AFFERMIAMO (MA DIMOSTREREMO PIÙ TARDI) CHE VALE LA SEGUENTE:

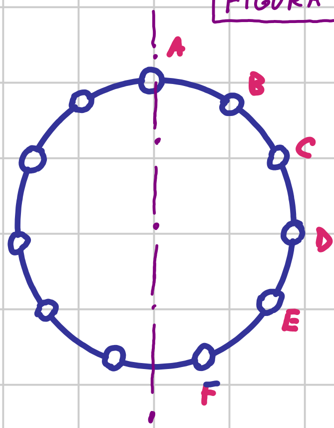
PROPRIETÀ 2 SE UNA CONFIGURAZIONE DI 11 PERLINE HA 2 ASSI DI SIMMETRIA DISTINTI ALLORA TUTTE LE PERLINE HANNO LO STESSO COLORE.

COME CONSEGUENZA DELLA PROPRIETÀ 2 CI SONO SOLO 3 TIPI DI CONFIGURAZIONI DI PERLINE:

- I QUELLE CON PERLINE TUTTE DELLO STESSO COLORE.
- II QUELLE CON PERLINE DI ENTRAMBI I COLORI, CON 1 ASSE DI SIMMETRIA
- III QUELLE CON PERLINE DI ENTRAMBI I COLORI, SENZA ASSI DI SIMMETRIA.

LE CONFIGURAZIONI DI TIPO I SONO SOLO 2.

FIGURA 12



CONTIAMO QUELLE DI TIPO II. CONTIAMO PRIMA QUELLE CON ASSE DI SIMMETRIA VERTICALE. IN TAL CASO (VEDI FIGURA 12) UNA VOLTA SCELTI I COLORI DELLE PERLINE A, B, C, D, E, F LA CONDIZIONE DI SIMMETRIA FORZA IL COLORE DELLE ALTRE, QUINDI I CASI SONO 2^6. A QUESTE PERÒ VANNO TOLTE LE 2 CONFIGURAZIONI CON PERLINE TUTTE DELLO STESSO COLORE.

QUINDI LE CONFIGURAZIONI CON ASSE DI SIMMETRIA VERTICALE CHE USANO ENTRAMBI I COLORI SONO 2^6-2. MA POICHÉ L'ASSE DI SIMMETRIA PUÒ AVERE 11 POSIZIONI DIVERSE, IN TUTTO LE CONFIGURAZIONI DI TIPO II SONO $11\cdot(2^6-2)$, CIOÈ 682.

DI CONSEGUENZA QUELLE DI TIPO III, CHE SONO TUTTE LE ALTRE, SONO $2^{11}-2-11(2^6-2)$, CIOÈ 1364.

RAGGRUPPIAMO ORA TRA LORO QUELLE EQUIVALENTI.

QUELLE DI TIPO $\boxed{I}$ STANNO DA SOLE.

QUELLE DI TIPO $\boxed{II}$ SONO RAGGRUPPATE IN CLASSI DA 11 PERCHÉ OGNUNA DI ESSE È EQUIVALENTE AD ALTRE 10 PER ROTAZIONE MA, ESSENDO SIMMETRICA, QUANDO VIENE "CAPOVOLTA" NON GENERA UNA CONFIGURAZIONE DIVERSA DA QUELLE CHE HA GIÀ GENERATO PER ROTAZIONE.

INFINE QUELLE DI TIPO $\boxed{III}$ SONO RAGGRUPPATE IN CLASSI DA 22. INFATTI SE UNA CONFIGURAZIONE NON HA ASSI DI SIMMETRIA, QUANDO VIENE CAPOVOLTA DÀ ORIGINE AD UNA CONFIGURAZIONE DIVERSA DALLE 10 CHE SI OTTENGONO PER ROTAZIONE. A SUA VOLTA, LA CONFIGURAZIONE ROVESCIATA DÀ ORIGINE, PER ROTAZIONE, AD ALTRE 10 CONFIGURAZIONI DIVERSE DA QUELLE GIÀ OTTENUTE. QUINDI OGNI CONFIGURAZIONE È EQUIVALENTE AD ALTRE 21.

RICAPITOLANDO, LE 682 CONFIGURAZIONI DI TIPO $\boxed{II}$ SONO RAGGRUPPATE IN 62 CLASSI DA 11 MENTRE LE 1364 CONFIGURAZIONI DI TIPO $\boxed{III}$ SONO RAGGRUPPATE IN 62 CLASSI DA 22.

SE A QUESTE SI AGGIUNGONO LE 2 CLASSI DI TIPO $\boxed{I}$ SI OTTENGONO IN TUTTO $62+62+2=126$ CLASSI.

QUINDI I BRACCIALETTI "ESSENZIALMENTE DIVERSI" SONO 126.

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPRIETÀ 2

DOBBIAMO RICORDARE CHE QUANDO SI FA, PRIMA LA SIMMETRIA RISPETTO UNA RETTA s, POI LA SIMMETRIA RISPETTO LA RETTA r, (VEDI FIGURA 13) SI OTTIENE LO STESSO RISULTATO CHE SI OTTERREBBE FACENDO UNA ROTAZIONE DI 2α INTORNO AD O, DOVE O È IL PUNTO DI INTERSEZIONE TRA r E s ED α È L'ANGOLO TRA r E s.

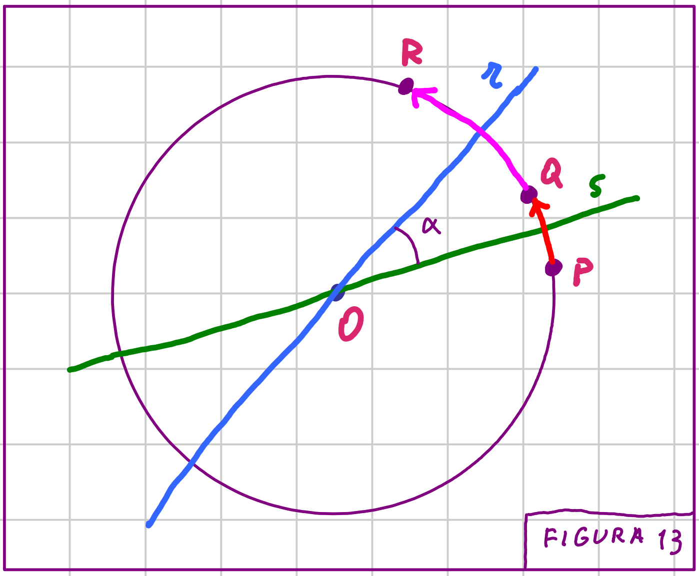


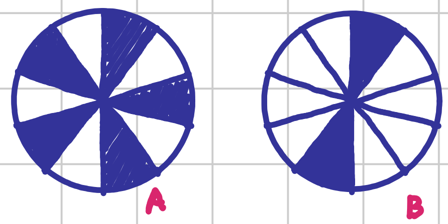
FIGURA 13

PER CONVINCERSENE BASTA OSSERVARE CHE SE LA SIMMETRIA RISPETTO A s MANDA P IN Q E LA SIMMETRIA RISPETTO A z MANDA Q IN R, ALLORA SIA L'ARCHETTO $\widehat{PQ}$ SIA L'ARCHETTO $\widehat{QR}$ STANNO METÀ DENTRO E METÀ FUORI L'ANGOLO α, QUINDI L'ANGOLO SOTTESO DALL'ARCHETTO $\widehat{PR}$ È 2α.
DETTO QUESTO, VISTO CHE UN POLIGONO REGOLARE DI 11 LATI HA 11 ASSI DI SIMMETRIA CHE FORMANO TRA LORO ANGOLI MULTIPLI DI $\frac{1}{22}$ DI ANGOLO GIRO, SE 2 DI ESSI FOSSERO DI SIMMETRIA ANCHE PER LA DISTRIBUZIONE DI PERLINE ALLORA ESISTEREBBE UNA ROTAZIONE DI $\frac{k}{11}$ DI ANGOLO GIRO CHE SOVRAPPONE LA CONFIGURAZIONE DI PERLINE A SE STESSA. MA ALLORA, GRAZIE ALLA $\boxed{\text{PROPRIETÀ 1}}$ TUTTE LE PERLINE DEVONO AVERE LO STESSO COLORE.

PROBLEMA 5 COME IL PROBLEMA 3 MA COL POLIGONO CHE HA 10 LATI INVECE DI 11.

SOLUZIONE SICCOME, A DIFFERENZA DI 11, 10 NON È UN NUMERO PRIMO, IL PROBLEMA RISULTA PIÙ COMPLESSO, PERCHÈ NON VALE PIÙ LA $\boxed{\text{PROPRIETÀ 1}}$. ESISTONO INFATTI COLORAZIONI DEL POLIGONO CHE USANO ENTRAMBI I COLORI, CHE SONO SOVRAPPONIBILI A SE STESSE CON ROTAZIONI NON BANALI.

FIGURA 14



AD ESEMPIO, IN FIGURA 14, LA COLORAZIONE A VIENE SOVRAPPOSTA A SE STESSA DA UNA ROTAZIONE DI 2 "SPICCHI" (CIOÈ DI $\frac{2}{10}$ DI ANGOLO GIRO) MENTRE LA COLORAZIONE B VIENE SOVRAPPOSTA A SE STESSA DA UNA ROTAZIONE DI 5 SPICCHI (CIOÈ DI UN ANGOLO PIATTO).
PER COMODITÀ INTRODUCIAMO LA SEGUENTE:

NOTAZIONE 1 PER OGNI $k=1,2,\dots,9$ INDICHIAMO CON C_k L'INSIEME DI TUTTE LE COLORAZIONI CHE VENGONO SOVRAPPOSTE A SE STESSE DA UNA ROTAZIONE DI k SPICCHI.

AD ESEMPIO, LA COLORAZIONE A DELLA FIGURA 14 STA IN C_2, IN C_4, IN C_6 E IN C_8, MENTRE LA B STA SOLO IN C_5.
ORA, ANCHE SE LA $\boxed{\text{PROPRIETÀ 1}}$ NON VALE PIÙ, È POSSIBILE SOSTITUIRLA CON UN CERTO NUMERO DI PROPRIETÀ PIÙ DEBOLI CHE ENUNCIAMO E DIMOSTRIAMO

QUI DI SEGUITO:

PROPRIETÀ 3 C_1 CONTIENE SOLO LE DUE COLORAZIONI BANALI, CIOÈ CHE USANO UN SOLO COLORE.

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ 3 SE UNA COLORAZIONE STA IN C_1 SIGNIFICA CHE VIENE SOVRAPPOSTA A SE STESSA DALLA ROTAZIONE DELL'ANGOLO DI UNO SPICCHIO, CIOÈ CHE OGNI SPICCHIO HA LO STESSO COLORE DEL SUCCESSIVO, CIOÈ CHE TUTTI HANNO LO STESSO COLORE

PROPRIETÀ 4 $C_2 = C_4 = C_6 = C_8$.

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ 4 MOSTRIAMO CHE $C_2 = C_4$, LE ALTRE SONO ANALOGHE.

$C_2 \subset C_4$ È OVVIO, INFATTI SE UNA COLORAZIONE $\mathcal{L}$ STA IN C_2 SIGNIFICA CHE VIENE SOVRAPPOSTA A SE STESSA DA UNA ROTAZIONE DI 2 SPICCHI. MA ALLORA ANCHE FACENDO 2 ROTAZIONI DI 2 SPICCHI (CIOÈ UNA DI 4 SPICCHI) SI SOVRAPPONE $\mathcal{L}$ A SE STESSA, QUINDI $\mathcal{L}$ STA ANCHE IN C_4.

PER MOSTRARE CHE VALE ANCHE $C_4 \subset C_2$ SI RAGIONA ALLO STESSO MODO: SE $\mathcal{L}$ STA IN C_4 ALLORA RUOTANDOLA DI 4 SPICCHI VIENE SOVRAPPOSTA A SE STESSA, MA ALLORA CIÒ ACCADE ANCHE SE LA RUOTO 3 VOLTE DI 4 SPICCHI, CIOÈ DI 12. MA SICCOME 10 SPICCHI SONO UN ANGOLO GIRO, RUOTARLA DI 12 È COME RUOTARLA DI 2, QUINDI $\mathcal{L}$ STA IN C_2.

AVENDO DIMOSTRATO SIA $C_2 \subset C_4$ CHE $C_4 \subset C_2$ OTTENIAMO $C_2 = C_4$.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA $C_2 = C_6$ E $C_2 = C_8$.

PROPRIETÀ 5 $C_1 = C_3 = C_7 = C_9$.

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ 5 OVVIAMENTE $C_1 \subset C_k$ PER OGNI k, VISTO CHE C_1 CONTIENE SOLO LE COLORAZIONI CHE USANO UN SOLO COLORE E QUINDI VENGONO SOVRAPPOSTE A SE STESSE DA QUALSIASI ROTAZIONE DI k SPICCHI. PER AVERE $C_1 = C_3$ BASTA QUINDI DIMOSTRARE $C_3 \subset C_1$.

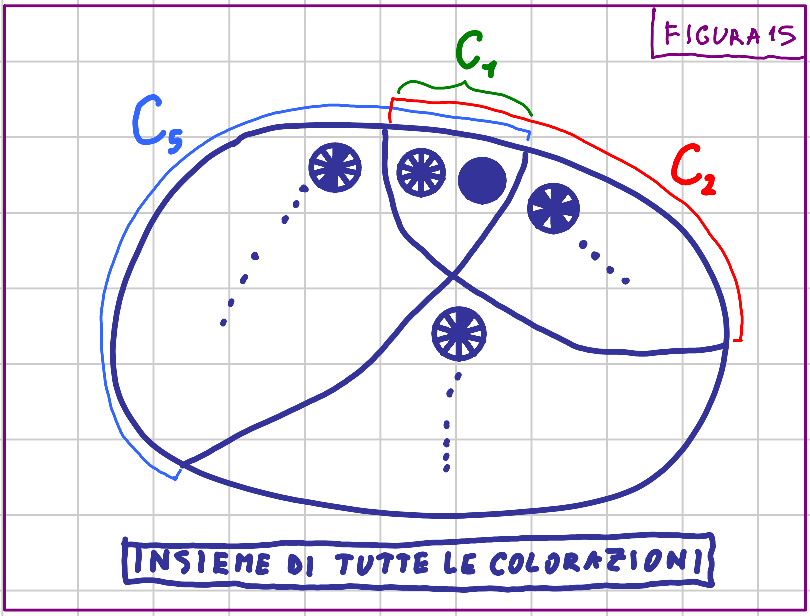
MA ANCHE QUESTO È SEMPLICE PERCHÉ, SE UNA COLORAZIONE $\mathcal{L}$ STA IN C_3, SIGNIFICA CHE RUOTANDOLA DI 3 SPICCHI SI SOVRAPPONE A SE STESSA, QUINDI ANCHE RUOTANDOLA 7 VOLTE DI 3 SPICCHI (CIOÈ DI 21 SPICCHI) SI SOVRAPPONE A SE STESSA. MA, ESSENDO 10 SPICCHI UN ANGOLO GIRO, RUOTARLA DI 21 SPICCHI E COME RUOTARLA DI 1. QUINDI $\mathcal{L}$ SI SOVRAPPONE A SE STESSA RUOTANDOLA DI 1 SPICCHIO, QUINDI $\mathcal{L}$ STA IN C_1.

QUINDI VALE ANCHE $C_3 \subset C_1$ OLTRE A $C_1 \subset C_3$. QUINDI $C_1 = C_3$.

IN MODO ANALOGO SI MOSTRA ANCHE $C_1 = C_7$ E $C_1 = C_9$, GRAZIE AL FATTO CHE 7 E 9 SONO PRIMI CON 10.

PROPRIETÀ 6 $C_2 \cap C_5 = C_1$

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ 6 SAPPIAMO GIÀ CHE $C_1 \subset C_5$ E $C_1 \subset C_2$, BASTA QUINDI MOSTRARE CHE $C_2 \cap C_5 \subset C_1$, CIOÈ CHE SE UNA COLORAZIONE DI $\mathcal{L}$ SI SOVRAPPONE A SE STESSA SIA RUOTANDOLA DI 2 SPICCHI CHE DI 5 SPICCHI, ALLORA SI SOVRAPPONE ANCHE RUOTANDOLA DI 1 SPICCHIO. MA QUESTO È OVVIO PERCHÉ SI SOVRAPPONE A SE STESSA RUOTANDOLA DI $5+2+2+2$ SPICCHI, CIOÈ DI 11, CIOÈ DI 1 (PERCHÉ 10 SONO UN ANGOLO GIRO)



GRAZIE ALLE 6 PROPRIETÀ APPENA DIMOSTRATE, L'INSIEME DI TUTTE LE COLORAZIONI È RIPARTITO COME IN FIGURA 15.

SAPPIAMO GIÀ CHE IN C_1 CI SONO SOLO LE 2 COLORAZIONI BANALI.

LE COLORAZIONI IN C_5 INVECE SONO 2^5, PERCHÉ UNA VOLTA SCELTI I COLORI DEI PRIMI 5 SPICCHI, RIMANE FISSATO IL COLORE DEGLI ALTRI 5, VISTO CHE DEVONO AUTOSOVRAPPORSI RUOTANDO DI 5.

QUINDI IN C_5 CI SONO 32 COLORAZIONI, 2 DELLE QUALI GIÀ CONTATE IN C_1.

IN MODO ANALOGO SI TROVA CHE LE COLORAZIONI DI C_2 SONO 2^2, CIOÈ 4, MA 2 DI ESSE STANNO GIÀ IN C_1.

INFINE, SICCOME IN TUTTO LE COLORAZIONI SONO 2^{10}, QUELLE CHE NON STANNO NÈ IN C_2 NÈ IN C_5 SONO $2^{10}-2^5-2^2+2$, CIOÈ 990.

ORA CHE (FINALMENTE) ABBIAMO CONTATO I VARI TIPI DI COLORAZIONI, DOBIAMO PROCEDERE A RAGGRUPPARE TRA LORO QUELLE EQUIVALENTI PERCHÈ IL NOSTRO SCOPO È CONTARE I RAGGRUPPAMENTI.

ABBIAMO CHE:

(a) LE 2 COLORAZIONI IN C_1 STANNO DA SOLE. QUINDI IN C_1 CI SONO 2 RAGGRUPPAMENTI.

(b) LE COLORAZIONI CHE STANNO IN C_2 MA NON IN C_1 VANNO RAGGRUPPATE A GRUPPI DI 2. SICCOME CE NE SONO SOLO 2, C'È 1 SOLO RAGGRUPPAMENTO.

(c) LE COLORAZIONI CHE STANNO IN C_5 MA NON IN C_1 VANNO RAGGRUPPATE A GRUPPI DI 5, QUINDI I RAGGRUPPAMENTI SONO $\frac{30}{5}$, CIOÈ 6.

(d) INFINE LE COLORAZIONI CHE NON STANNO NÈ IN C_5 NÈ IN C_2 VANNO RAGGRUPPATE A GRUPPI DI 10, QUINDI I RAGGRUPPAMENTI SONO $\frac{990}{10}$, CIOÈ 99.

IN TUTTO QUINDI I RAGGRUPPAMENTI SONO $2+1+6+99$, CIOÈ 108.

QUINDI LE COLORAZIONI "ESSENZIALMENTE DIVERSE" SONO 108.