Stage Urbi et Orbi - Lez. 1

Titolo nota

5 ottobre 2018 (15.00-18.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

www.problemisvolti.it

ARITMETICA ZERO

PROBLEMA 0

ELENCARE I DIVISORI DI 180 E DI 36.

SVOLGIMENTO

OSSERVAZIONE: se a divide 180 anche $\frac{180}{a}$ è un divisore di 180, quindi posso accoppiare i divisori a 2 a 2, in modo che ogni coppia sia costituita da divisori il cui prodotto è 180.

1	2	3	4	5	6	9	10	12
180	90	60	45	36	30	20	18	15

18 DIVISORI (9 COPPIE) METÀ PIÙ PICCOLI DI $\sqrt{180}$ E METÀ PIÙ GRANDI.

Ragionando allo stesso modo per 36 si ottiene:

1	2	3	4	6
36	18	12	9	

9 DIVISORI: $\sqrt{36} = 6$ PIÙ 4 COPPIE DI DIVISORI.

OSSERVAZIONE: Per elencare tutti i divisori di n basta trovare quelli che non superano $\sqrt{n}$ e poi aggiungere quelli a loro accoppiati.

OSSERVAZIONE: tutti i quadrati perfetti si comportano come 36 e quindi hanno un numero dispari di divisori mentre tutti gli altri si comportano come 180 e quindi hanno un numero pari di divisori

PROBLEMA 1

CALCOLARE IL PRODOTTO DEI DIVISORI DI 180 E QUELLO DEI DIVISORI DI 36.

SVOLGIMENTO

CASO $n = 180$

Ricordiamo la tabella trovata prima:

1	2	3	4	5	6	9	10	12
180	90	60	45	36	30	20	18	15
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
180	180	180	180	180	180	180	180	180

$\to 180^9$

Quindi il prodotto di tutti i divisori di 180 è 180^9.

OSSERVAZIONE: questo procedimento funziona in generale per tutti gli interi positivi n che non sono quadrati perfetti e si ottiene la formula:

$d(n)$ SIGNIFICA "NUMERO DEI DIVISORI DI n"

$\Pi(n)$ SIGNIFICA "PRODOTTO DEI DIVISORI DI n"

$$\Pi(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$$

CASO $n = 36$

La tabella dei divisori di 36 è:

1	2	3	4	6
36	18	12	9	
↓	↓	↓	↓	↓
36	36	36	36	
↓	↓	↓	↓	
6^2	6^2	6^2	6^2	6

$\to 6^9$

Quindi il prodotto dei divisori di 36 è 6^9

OSSERVAZIONE: il metodo usato per 36 funziona chiaramente per ogni n che sia un quadrato perfetto e si ottiene la formula:

$$\Pi(n) = \left(\sqrt{n}\right)^{d(n)}$$

OSSERVAZIONE: la formula trovata coincide con quella del caso in cui n non è un quadrato perfetto perché:

$$\Pi(n) = \left(\sqrt{n}\right)^{d(n)} = \left(n^{\frac{1}{2}}\right)^{d(n)} = n^{\frac{d(n)}{2}}$$

PROBLEMA 2 CALCOLARE $\Pi(3600)$ [CIOÈ IL PRODOTTO DI TUTTI I DIVISORI DI 3600]

SVOLGIMENTO

Utilizziamo la formula appena trovata:

$$\Pi(3600) = \left(\sqrt{3600}\right)^{d(3600)} = 60^{d(3600)}$$

Siccome i divisori di 3600 sono tanti stavolta ci serve un modo pratico per dire quanti sono senza doverli prima elencare.

A tale scopo osserviamo che:

$$3600 = 60^2 = 6^2 \cdot 10^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

quindi i divisori di 3600 sono tutti e soli i numeri del tipo:

$$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \quad \text{con } \alpha = 0,1,2,3,4 \quad \beta = 0,1,2 \quad \gamma = 0,1,2$$

Ci sono quindi i casi possibili sono in tutto $5 \cdot 3 \cdot 3$, cioè 45.
Quindi $d(3600) = 45$ e perciò:

$$\Pi(3600) = 60^{d(3600)} = 60^{45}$$

GENERALIZZAZIONE

Il metodo usato per determinare $d(3600)$ funziona in generale per ogni intero positivo n.
Infatti, scomponendo n in fattori primi si ottiene una fattorizzazione del tipo:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

quindi i divisori di n saranno tutti e soli i numeri del tipo:

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$$

con $\beta_1 = 0, 1, \ldots, \alpha_1$, $\beta_2 = 0, 1, \ldots, \alpha_2$, ..., $\beta_k = 0, 1, \ldots, \alpha_k$
quindi i casi che si possono presentare sono in tutto

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k+1)$$

quindi vale la formula

$$d(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdots (\alpha_k+1)$$

PROBLEMA 3

CALCOLARE LA SOMMA DI TUTTI I DIVISORI DI 3^{15}.

NOTAZIONE
LA SOMMA DI TUTTI I DIVISORI DI n SI INDICA CON $\sigma(n)$

SVOLGIMENTO

I divisori di 3^{15} sono tutti e soli i numeri del tipo 3^{α} con $\alpha = 0, 1, \ldots, 15$, quindi si ha:

$$\sigma(3^{15}) = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{15} = \frac{3^{16}-1}{3-1} = \frac{(3^8-1)(3^8+1)}{2} = \frac{6560 \cdot 6562}{2} = 21'523'360$$

SI USA, CON $x = 3$ ED $n = 15$ LA FORMULA

(*) $$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

CHE VALE PER OGNI $x \neq 1$ E PER OGNI n INTERO POSITIVO

PER MOSTRARE CHE LA FORMULA (*) VALE, BISOGNA VERIFICARE CHE

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)(1-x) = 1-x^{n+1}$$

MA CIÒ SI OTTIENE SUBITO ESEGUENDO IL PRODOTTO DEI 2 POLINOMI AL PRIMO MEMBRO NEL MODO SEGUENTE:

$$(1+x+x^2+\dots+x^2)(1-x) = 1+\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{\dots}+\cancel{x^n}-\cancel{x}-\cancel{x^2}-\cancel{x^3}-\dots-\cancel{x^n}-x^{n+1} =$$
$$= 1-x^{n+1}$$

PROBLEMA 4 CALCOLARE $\sigma(576)$ [CIOÈ LA SOMMA DEI DIVISORI DI 576]

SVOLGIMENTO

Si ha:

$$576 = 24^2 = (3\cdot 2^3)^2 = 2^6\cdot 3^2$$

quindi i divisori di 576 sono tutti e soli i numeri del tipo:

$$2^\alpha\cdot 3^\beta \qquad \text{con } \alpha=0,1,\dots,6 \text{ e } \beta=0,1,2$$

Stavolta, quindi, non è possibile usare subito la formula $1+x+x^2+\dots+x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$, ma ci si può ricondurre ad essa operando successivi raccoglimenti nel modo seguente:

$$\left.\begin{array}{ll}
\sigma(576) = 1+2+2^2+\dots+2^6+ & \leftarrow \boxed{\text{DIVISORI DEL TIPO } 2^\alpha} \\
+\,3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 2^2+\dots+3\cdot 2^6+ & \leftarrow \boxed{\text{DIVISORI DEL TIPO } 3\cdot 2^\alpha} \\
+\,3^2\cdot 1+3^2\cdot 2+3^2\cdot 2^2+\dots+3^2\cdot 2^6 = & \leftarrow \boxed{\text{DIVISORI DEL TIPO } 3^2\cdot 2^\alpha}
\end{array}\right\} \text{TUTTI I DIVISORI}$$

$$= (1+2+2^2+\dots+2^6)+$$
$$+\,3\cdot(1+2+2^2+\dots+2^6)+$$
$$+\,3^2\cdot(1+2+2^2+\dots+2^6) =$$

$$= (1+3+3^2)(1+2+2^2+\dots+2^6) = \frac{3^3-1}{3-1}\cdot\frac{2^7-1}{2-1} = 13\cdot 127 = 1651$$

PROBLEMA 5 CALCOLARE $\sigma(3600)$ [CIOÈ CALCOLARE LA SOMMA DEI DIVISORI DI 3600]

SVOLGIMENTO Si ha:

$$3600 = 60^2 = 6^2 \cdot 10^2 = (2\cdot 3)^2 \cdot (2\cdot 5)^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

quindi i divisori di 3600 sono tutti e soli i numeri del tipo

$$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \quad \text{con } \alpha = 0,1,\dots,4 \quad \beta = 0,1,2 \quad \gamma = 0,1,2$$

Quindi si ha:

$$\sigma(3600) = \underbrace{\sum_{\substack{\alpha=0,\dots,4\\ \beta=0,1,2\\ \gamma=0,1,2}} 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma}_{\text{SOMMA DI TUTTI I DIVISORI}} = \underbrace{\sum_{\substack{\alpha=0,\dots,4\\ \beta=0,1,2}} 2^\alpha \cdot 3^\beta}_{\text{SOMMA DI TUTTI I DIVISORI DEL TIPO } 2^\alpha\cdot 3^\beta} + \underbrace{\sum_{\substack{\alpha=0,\dots,4\\ \beta=0,1,2}} 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5}_{\text{SOMMA DI TUTTI I DIVISORI DEL TIPO } 2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5} + \underbrace{\sum_{\substack{\alpha=0,\dots,4\\ \beta=0,1,2}} 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^2}_{\text{SOMMA DI TUTTI I DIVISORI DEL TIPO } 2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^2} =$$

QUESTO SIMBOLO SI LEGGE: "SOMMATORIA AL VARIARE DI α, β, γ ....."

$$= 1 \cdot \sum_{\substack{\alpha=0,\dots,4\\ \beta=0,1,2}} 2^\alpha \cdot 3^\beta + 5 \cdot \sum_{\substack{\alpha=0,\dots,4\\ \beta=0,1,2}} 2^\alpha \cdot 3^\beta + 5^2 \cdot \sum_{\substack{\alpha=0,\dots,4\\ \beta=0,1,2}} 2^\alpha \cdot 3^\beta =$$

$$= (1 + 5 + 5^2) \cdot \sum_{\substack{\alpha=0,\dots,4\\ \beta=0,1,2}} 2^\alpha \cdot 3^\beta = \underset{\text{(OPERANDO COME NEL PROBLEMA 4)}}{\cdots\cdots\cdots\cdots} =$$

$$= (1+5+5^2) \cdot (1+3+3^2) \cdot (1+2+2^2+2^3+2^4) =$$

$$= \frac{5^3-1}{5-1} \cdot \frac{3^3-1}{3-1} \cdot \frac{2^5-1}{2-1} = \frac{124}{4} \cdot \frac{26}{2} \cdot \frac{31}{1} = 31 \cdot 13 \cdot 31 = 12493$$

GENERALIZZAZIONE OPERANDO COME NEL PROBLEMA 5 SI DIMOSTRA CHE SE:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

ALLORA SI HA

$$(\bullet) \qquad \sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

AD ESEMPIO SE CI VENISSE CHIESTO DI CALCOLARE $\sigma(630'000)$ CIOÈ LA SOMMA DEI DIVISORI DI 63000, BASTEREBBE OSSERVARE CHE

$$630'000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$$

E POI APPLICARE LA NOSTRA FORMULA:

$$\sigma(630'000) = \frac{2^5-1}{2-1} \cdot \frac{3^3-1}{3-1} \cdot \frac{5^5-1}{5-1} \cdot \frac{7^2-1}{7-1} =$$

$$= \frac{31}{1} \cdot \frac{26}{2} \cdot \frac{3124}{4} \cdot \frac{48}{6} =$$

$$= 31 \cdot 13 \cdot 781 \cdot 8 = 2'517'944$$

OSSERVAZIONE (PER I "NON" PRINCIPIANTI)

CHI VOLESSE FARE UNA DIMOSTRAZIONE FORMALE DELLA FORMULA (●) PUÒ FARLO PER INDUZIONE SU k, USANDO IL PROCEDIMENTO UTILIZZATO NEL PROBLEMA 5 PER DIMOSTRARE IL PASSO INDUTTIVO.

PROBLEMA 6 (ESEMPIO DI PROBLEMA NON STANDARD)

TROVARE IL PIÙ PICCOLO INTERO n AVENTE ESATTAMENTE 20 DIVISORI.

SVOLGIMENTO

Ci sono 4 modi di scrivere 20 come prodotto di interi:

$$20, \quad 2\cdot 10, \quad 4\cdot 5, \quad 2\cdot 2\cdot 5$$

A ciascuno di tali modi corrisponde un tipo di fattorizzazione che consente di ottenere 20 divisori:

1) $n = p^{19}$ ⟵ IL PIÙ PICCOLO È $n = 2^{19}$
2) $n = p \cdot q^9$ ⟵ IL PIÙ PICCOLO È $n = 3 \cdot 2^9$
3) $n = p^3 \cdot q^4$ ⟵ IL PIÙ PICCOLO È $n = 3^3 \cdot 2^4$
4) $n = p \cdot q \cdot r^4$ ⟵ IL PIÙ PICCOLO È $n = 3 \cdot 5 \cdot 2^4$

IL PIÙ PICCOLO DEI QUATTRO È $n = 3\cdot 5 \cdot 2^4 = 240$

Quindi il più piccolo numero avente 20 divisori è 240.

PROBLEMA 7 CALCOLARE $MCD(333'370, 333'333)$

SVOLGIMENTO

OSSERVAZIONE: Dati 2 interi positivi a e b, con $a > b$, ogni divisore comune ad a e b divide anche $(a-b)$. Viceversa ogni divisore comune a b e $(a-b)$ divide anche a. Ciò significa che l'insieme dei divisori comuni di a e b è uguale all'insieme dei divisori comuni di b e $(a-b)$. Di conseguenza:

$$MCD(a,b) = MCD(b, a-b)$$

Nel nostro caso:

$$MCD(333'370, 333'333) = MCD(333'333, 37) = 37$$

PERCHÉ LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE 37 DIVIDE 333'333

PROBLEMA 8 CALCOLARE $MCD(333'370, 111'111)$

OSSERVAZIONE (che generalizza quella del problema 7): dati due interi a, b con $a > b > 0$, sia r il resto della divisione $a : b$, se un numero d divide sia a che b allora divide anche r. Viceversa se d divide b ed r divide anche a.
Ciò significa che l'insieme dei divisori comuni di a e b coincide con l'insieme dei divisori comuni di b ed r. Di conseguenza:

$$(*) \qquad MCD(a,b) = MCD(b, r)$$

Nel nostro caso:

$$MCD(333'370, 111'111) = MCD(111'111, 37) = 37$$

PERCHÉ 37 DIVIDE 111'111

OSSERVAZIONE: Applicare ripetutamente l'osservazione $(*)$ per calcolare il MCD prende il nome di ALGORITMO EUCLIDEO.

OSSERVAZIONE (efficienza dell'algoritmo euclideo): i numeri per i quali l'algoritmo euclideo è meno efficiente sono i numeri di Fibonacci.

Per i dettagli si veda lo svolgimento del problema 20 della Gara Nazionale delle Classi Prime del 2013.

OSSERVAZIONE: L'algoritmo Euclideo si applica anche in contesti più generali. Ad esempio, più avanti nello stage impareremo ad utilizzarlo per trovare il MCD di 2 polinomi. Più in generale, l'algoritmo Euclideo si può utilizzare tutte le volte che ha senso parlare di "divisione con resto", cioè nei cosiddetti "Anelli Euclidei".

PROBLEMA 9 CALCOLARE $MCD(12600, 2970) \cdot mcm(12600, 2970)$.

SVOLGIMENTO

Come vedremo, in generale vale la formula:

$$(\oplus) \qquad MCD(a,b) \cdot mcm(a,b) = a \cdot b$$

Quindi, nel nostro caso, senza dover davvero calcolarli, si ottiene:

$$MCD(12600, 2970) \cdot mcm(12600, 2970) = 12600 \cdot 2970 = 37'422'000$$

Tuttavia, il metodo più semplice per convincersi che la formula $(\oplus)$ è vera, è quello di testarne la validità in un caso particolare (ad esempio il nostro) e poi convincersi che il procedimento usato funziona sempre.

Troviamo quindi $MCD(12600, 2970)$ e $mcm(12600, 2970)$ nel modo scolastico e facciamone il prodotto. Dopo aver scomposto i 2 numeri si trova

$$12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$
$$2790 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

ABBIAMO CERCHIATO DI ROSSO I FATTORI DA METTERE NEL MCD, E DI VERDE QUELLI DA METTERE NEL m.c.m

e quindi

$$MCD = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$mcm = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

Si vede chiaramente che $a \cdot b$ e $MCD \cdot mcm$ contengono gli stessi fattori e quindi sono uguali

GENERALIZZAZIONE Nel caso generale il procedimento è identico. Si ha:

$$a = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot P_n^{\alpha_n}$$
$$b = P_1^{\beta_1} \cdot P_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot P_n^{\beta_n}$$

È CONTEMPLATO AUTOMATICAMENTE ANCHE IL CASO IN CUI UN P_k COMPAIA NELLA FATTORIZZAZIONE DI UNO SOLO DEI DUE NUMERI, PERCHÈ SI PUÒ SEMPRE METTERLO NELL'ALTRA CON ESPONENTE 0.

da cui segue che:

$$MCD(a,b) = P_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot P_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot P_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}}$$
$$mcm(a,b) = P_1^{MAX\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot P_2^{MAX\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot P_n^{MAX\{\alpha_n,\beta_n\}}$$

Per ogni P_k che compare nella fattorizzazione si ha:

$$P_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}} \cdot P_k^{MAX\{\alpha_k,\beta_k\}} = P_k^{\alpha_k+\beta_k} = P_k^{\alpha_k} \cdot P_k^{\beta_k}$$

e da ciò segue subito che:

$$MCD(a,b) \cdot mcm(a,b) = a \cdot b$$

che è quanto volevamo dimostrare.

PROBLEMA 10 CALCOLARE m.c.m $(5871, 437)$.

SVOLGIMENTO Poiché per calcolare MCD abbiamo un algoritmo migliore, conviene calcolare comunque prima MCD e poi, per calcolare m.c.m. utilizzare il fatto che

$$MCD(a,b) \cdot mcm(a,b) = a \cdot b$$

Grazie all'algoritmo Euclideo si ha:

$$MCD(5871, 437) = MCD(437, 190) = MCD(190, 57) = 19$$

5871 : 437 = 13 CON RESTO = 190

437 : 190 = 2 CON RESTO = 57

PERCHÈ 190 = 10 · 19 E 57 = 3 · 19

Quindi:

$$mcm(5871, 437) = \frac{5871 \cdot 437}{MCD(5871,437)} = \frac{5871 \cdot \cancel{437}^{23}}{\cancel{19}_{1}} = 135033$$

PROBLEMA 11 SCRIVERE, IN TUTTI I MODI POSSIBILI, 100 COME DIFFERENZA DI 2 QUADRATI.

SVOLGIMENTO Dobbiamo trovare tutte le coppie (x,y) di interi non negativi tali che:

$$x^2 - y^2 = 100$$

cioè tali che:

$$(x+y)(x-y) = 100$$

Bisogna cioè che $(x+y)$ e $(x-y)$ siano divisori di 100 "accoppiati" tra loro. La tabella dei divisori di 100 è:

1	2	4	5	10
100	50	25	20	

quindi ci potrebbero essere 5 casi:

A $\begin{cases} x+y=100 \\ x-y=1 \end{cases}$

B $\begin{cases} x+y=50 \\ x-y=2 \end{cases}$

C $\begin{cases} x+y=25 \\ x-y=4 \end{cases}$

D $\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=5 \end{cases}$

E $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=10 \end{cases}$

tuttavia solo i casi B e E ci danno valori interi di x e y. Infatti risolvendo B si ottiene $x=26$ e $y=24$ e risolvendo E si ottiene $x=10$ e $y=0$. Tutti gli altri casi danno soluzioni non intere. Ci sono quindi 2 soli modi di scrivere 100 come differenza di quadrati:

$$100 = 26^2 - 24^2 \quad e \quad 100 = 10^2 - 0^2$$

OSSERVAZIONE C'era un modo rapido per decidere che i casi A, C e D andavano scartati. Basta infatti osservare che la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x+y=m \\ x-y=n \end{cases}$$

con n,m interi positivi

è data da

$$\begin{cases} x = \frac{m+n}{2} \\ y = \frac{m-n}{2} \end{cases}$$

quindi x e y sono interi se e solo se m e n sono entrambi pari o entrambi dispari.

Questo permetterà di scartare subito (A), (C) e (D).

PROBLEMA 12 (SOLO DISCUSSO ALLA FINE E DA COMPLETARE A CASA)

QUALI SONO I NUMERI INTERI POSITIVI a CHE NON POSSONO ESSERE SCRITTI COME DIFFERENZA DI QUADRATI?

RISPOSTA TUTTI E SOLI QUELLI DIVISIBILI PER 2 MA NON PER 4.

SUGGERIMENTO BASTA OSSERVARE CHE SE a È DIVISIBILE PER 2 MA NON PER 4 E $m \cdot n = a$, ALLORA m ED n SARANNO SEMPRE UNO PARI ED UNO DISPARI, QUINDI IL SISTEMA

$$\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$$

NON HA SOLUZIONI INTERE